0.1 Souvislost

Definice 0.1.1. Buď $G = (V, E)$ graf. Posloupnost vrcholů $v_0, v_1, ..., v_k$ nazýváme **sledem** (angl. *walk*) délky k, jestliže platí

$$\left(\forall i \in \hat{k}\right)\left(\{v_{i-1}, v_i\} \in E\right).$$

Sled $v_0, v_1, ..., v_k$ nazveme **cestou** (angl. *path*) délky k, pokud navíc

$$\left(\forall i, j \in \{0, 1, 2..., k\}\right)\left(i \neq j \Rightarrow v_{i-1} \neq v_i\right).$$

Sled $v_0, v_1, ..., v_k$, pro který platí $v_0 = v_k$, nazýváme **cyklem** (angl. *closed path*) délky k. Cyklus $v_0, v_1, ..., v_k$ nazveme **kružnicí** (angl. *cycle* (**!**)) délky k, pokud

$$\left(\forall i, j \in \{0, 1, 2..., k-1\}\right)\left(i \neq j \Rightarrow v_{i-1} \neq v_i\right).$$

Definice 0.1.2. Buď $G = (V, E)$ graf, $u, v \in V$. Řekneme, že vrcholy u a v **jsou spojeny** (angl. *linked*) v G, existuje-li sled v G s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v, tj. sled

$$u = v_0, v_1, ..., v_{k-1}, v_k = v.$$

Poznámka. Relace „být spojen“ je ekvivalence na množině vrcholů V. Přitom každý vrchol je spojen sám se sebou sledem délky 0.

Definice 0.1.3. Třídy ekvivalence podle uvedené relace nazýváme **komponenty** (angl. *component*) grafu G. Jejich počet značíme $c(G)$. Jestliže $c(G) = 1$, říkáme, že graf G je **souvislý** (angl. *connected*).

Poznámka. Graf G je souvislý, právě když mezi dvěma libovolnými vrcholy existuje sled.

Příklad. Z 8 grafů na 3 vrcholech jsou 4 souvislé. Přitom pro $\#V = 3$ platí, že G je souvislý, právě když $\bar{G}$ není souvislý.

Poznámka 0.1.4. Platí: G není souvislý $\Rightarrow \bar{G}$ je souvislý. Opačná implikace neplatí.

Důkaz. Množinu vrcholů grafu G rozdělíme na jednu komponentu $V_1 \subset V$ a zbytek $V_2 \subset V$. Potom mezi těmito dvěma podmnožinami neexistují žádné hrany. Naopak v doplňku grafu G existují hrany mezi libovolným $u \in V_1$ a $v \in V_2$. Proto mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje sled, a to maximálně délky 2.

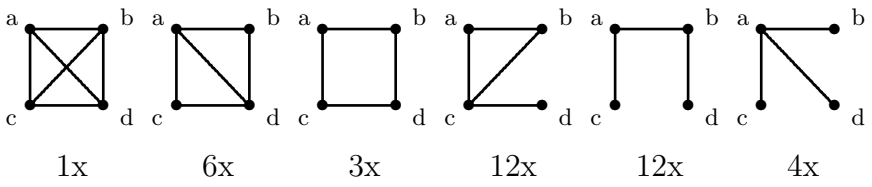
Příkladem vyvracejícím platnost opačné implikace jsou grafy H a $\bar{H}$ na obrázku **??**. □

0.1.1 Počet souvislých grafů na n vrcholech

Označme s_n počet různých souvislých grafů na n vrcholech.

Příklad. Obrázek 0.1.1 ukazuje všechny typy souvislých grafů na 4 vrcholech, přičemž čísla pod jednotlivými grafy udávají počet izomorfních grafů stejného typu. I když to není pro výklad důležité, ukážeme pro úplnost, jakým způsobem lze na uvedená čísla přijít (grafy okomentujeme zleva doprava):

1. Jasné.
2. Chybí jedna hrana. Možností, jak z úplného grafu odebrat hranu, je zjevně 6.
3. Dvě různé dvojice nejsou spojeny hranou. První dvojici vybereme $\binom{4}{2} = 6$ způsoby, druhá je již jednoznačně dána. Pořadí výběru dvojic však nehraje roli, proto je počet souvislých grafů tohoto typu roven $\frac{6}{2} = 3$.
4. Z jednoho vrcholu („zdroje“) nevedou dvě hrany (do dvou vrcholů „cílů“). Zdroj lze vybrat 4 způsoby, cíle lze vybrat $\binom{3}{2} = 3$ způsoby.
5. Prostřední hrana (mezi vrcholy **a**,**b**) lze vybrat 6 způsoby, hrany do zbylé dvojice vrcholů lze zvolit 2 způsoby.



Obrázek 0.1.1: Souvislé grafy na 4 vrcholech

6. Jeden vrchol je spojen se třemi ostatními. Tento vrchol lze vybrat 4 způsoby.

Celkem máme na 4 vrcholech

$$s_4 = 1 + 6 + 3 + 12 + 12 + 4 = 38$$

souvislých grafů. Jak snadno spočítat s_n pro libovolné n ukazuje následující věta.

Věta 0.1.5. *Bud' s_n počet souvislých grafů na n vrcholech. Potom platí*

$$n \cdot 2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k s_k 2^{\binom{n-k}{2}}.$$

Důkaz. Uvedenou rovnost dokážeme zajímavou úvahou. Vyjádříme počet všech uspořádaných dvojic (G, x) kde G je graf na n vrcholech a x je jeden z vrcholů tohoto grafu, a to dvěma způsoby.

1. Počet všech grafů je $2^{\binom{n}{2}}$, v každém z nich lze vrchol x zvolit n způsoby, uvedených dvojic je tedy $P = n \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.

2. Zvolme pevně $k \in \hat{n}$. Počet dvojic (G, x), kde x se nachází v komponentě grafu G, která má k vrcholů, je

$$p_k = \binom{n}{k} k s_k 2^{\binom{n-k}{2}},$$

protože:

   (a) $\binom{n}{k}$ způsoby lze vybrat k vrcholů z n,

   (b) k způsoby lze z vybraných vrcholů zvolit vrchol x,

   (c) s_k je počet různých komponent (souvislých podgrafů), které lze na vybraných k vrcholech vytvořit

   (d) a $2^{\binom{n-k}{2}}$ je počet všech grafů (na $n-k$ vrcholech), které mohou být vytvořeny na vrcholech, které jsme nevybrali.

Protože pro pro každou dvojici (G, x) se x zřejmě nachází v komponentě o počtu vrcholů alespoň 1 a nejvýše n, platí

$$n \cdot 2^{\binom{n}{2}} = P = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

□

Poznámka. Po vydělení n přejde rovnost na tvar

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} s_k 2^{\binom{n-k}{2}}.$$

Příklad. Protože už víme, že

$$s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 4,$$

lze dosazením do rekurentního vzorce pro $n = 4$ získat postupně

$$\begin{aligned} 2^{\binom{4}{2}} &= \sum_{k=1}^{4} \binom{3}{k-1} s_k 2^{\binom{4-k}{2}} \\ 64 &= 8 + 6 + 12 + s_4 \\ 38 &= s_4 \end{aligned}$$

Je vidět, že jsme se v našich úvahách předvedených v předchozím příkladu nespletli.

0.1.2 Adjacenční matice souvislého grafu

Věta 0.1.6. *Bud' $\boldsymbol{A}_G$ adjacenční matice grafu G, necht' $k \in \hat{n}$. Potom prvek $\left(\boldsymbol{A}_G^k\right)_{ij}$ je roven počtu sledů délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j.*

Důkaz. Tvrzení snadno dokážeme indukcí podle k:

- pro $k = 1$: Podle definice platí

  $$(\boldsymbol{A}_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

  což zjevně představuje počet sledů délky 1 (což jsou přímo hrany) z v_i do v_j.

- indukční krok $k \to k + 1$: Platí

  $$\left(\boldsymbol{A}_G^{k+1}\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \left(\boldsymbol{A}_G^k\right)_{il} (\boldsymbol{A}_G)_{lj} = \sum_{\substack{l=1 \\ \{v_l, v_j\} \in E}}^{n} \underbrace{\left(\boldsymbol{A}_G^k\right)_{il}}_{(*)}.$$

  $(*)$ představuje počet sledů délky k z v_i do v_l. Sčítá se však pouze přes takové vrcholy v_l, z nichž vede hrana do vrcholu v_j. Proto $(*)$ rovněž představuje počet sledů délky $k+1$ z v_i do v_j takových, že předposledním vrcholem v sledu je v_l. Součtem přes všechny takové v_l dostaneme celkový počet sledů délky $k + 1$ z v_i do v_j.

□

Důsledek. *Necht' $\boldsymbol{A}_G$ je adjacenční matice grafu $G = (V, E)$,$n = \#V$. Potom G je souvislý právě tehdy, když*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}_G^k > 0,$$

tj. právě když všechny prvky uvedené matice jsou kladné.

Důkaz. Je zřejmé, že mezi dvěma různými vrcholy existuje sled, právě když mezi nimi existuje cesta. (Ze sledu obsahujícího vícekrát stejný vrchol lze odstranit všechny úseky, které leží mezi dvěma výskyty tohoto vrcholu ve sledu, čímž nakonec získáme cestu.) Každá cesta v grafu na n vrcholech má délku maximálně $n - 1$.

$\boxed{\Rightarrow:}$

G je souvislý $\Rightarrow$ pro $\forall i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$, existuje cesta (a tedy i sled) z v_i do v_j nějaké délky $k \leq n - 1$. $\Rightarrow \left(\boldsymbol{A}_G^k\right)_{ij} > 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}_G^k\right)_{ij} > 0$. Každý prvek uvedené matice je tedy kladný.

$\boxed{\Leftarrow:}$

$\forall i, j \in \hat{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}_G^k\right)_{ij} > 0$. $\Rightarrow \exists k \in \{1, ..., n-1\}$ tak, že $\left(\boldsymbol{A}_G^k\right)_{ij} > 0 \Rightarrow$ existuje sled (délky k) z v_i do v_j $\Rightarrow G$ je souvislý. □