0.1 Vrcholové obarvení grafu

Definice 0.1.1. Nechť $G = (V, E)$ je graf, $k \in \mathbb{N}$. k-**vrcholovým obarvením** (angl. *k-vertex colouring*) grafu G nazveme zobrazení $\varphi : V \mapsto \hat{k}$. φ se nazývá **vlastní** (angl. *proper*) k-vrcholové obarvení grafu G, jestliže platí

$$(\forall u, v \in V)\,(\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow \{u, v\} \notin E)\,,$$

tj. jestliže stejně barevné vrcholy nejsou spojeny hranou. Minimální k takové, že existuje k-vrcholové vlastní obarvení grafu G, se nazývá **barevnost** (angl. *chromatic number*) grafu G a značí se $\chi(G)$.

Příklad. Jestliže vrcholy reprezentují účastníky reality show a hrany vedou mezi těmi, kteří se nesnášejí, pak $\chi(G)$ je minimální počet skupin, do nichž lze soutěžící rozdělit tak, aby v žádné skupině nebyli dva, kteří se nesnášejí.

Poznámka.

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G = (V, \emptyset)$.
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ je bipartitní s alespoň jednou hranou ($\Leftrightarrow$ v G není kružnice liché délky).
- $\chi(G) = p, p \geq 3 \Leftrightarrow$??

Rozhodnout o tom, zda $\chi(G) = p$, je pro obecný graf NP-úplná úloha. Podle předchozích bodů můžeme jen ověřit, jestli $\chi(G) \geq 3$ nebo ne.

Poznámka 0.1.2. Zřejmě vždy platí $\chi(G) \leq n = \#V$. Jestliže obarvíme každý vrchol jinou barvou, dostaneme vlastní obarvení. Přitom když $G = K_n$, tj. je-li G úplným grafem na n vrcholech, tak $\chi(G) = n$. Platí i opačná implikace, protože chybí-li mezi dvěma vrcholy hrana, lze je obarvit stejnou barvou a zbylé vrcholy opět obarvit různě. Celkem tedy

$$\chi(G) = n \Leftrightarrow G = K_n.$$

Definice 0.1.3. Nechť $G = (V, E)$ je graf, $k \in \mathbb{N}$.

- **Klikou** (angl. *clique*) velikosti k v G rozumíme množinu vrcholů $S \subset V$ takovou, že podgraf $G[S] = \left(S, E \cap \binom{S}{2}\right)$ indukovaný množinou S je úplný, tj. každé dva vrcholy z S jsou spojeny hranou v G.
- $S \subset V$ se nazývá **nezávislá množina** (angl. *independent set*) velikosti k v G, jestliže $E \cap \binom{S}{2} = \emptyset$, tj. jestliže žádné dva vrcholy z S nejsou spojeny hranou v grafu G.
- $S \subset V$ se nazývá **vrcholové pokrytí** (angl. *covering*) grafu G, jestliže $(\forall e \in E)\,(\exists v \in S)\,(v \in e)$, tj. jestliže každá hrana v G má alespoň jeden konec v S.

Maximální velikost kliky v grafu G značíme $\omega(G)$, maximální velikost nezávislé množiny značíme $\alpha(G)$.

Poznámka. V přednášce někdy klikou velikosti k nazýváme též úplný podgraf $K_k = G[S]$, který množina S indukuje.

Poznámka 0.1.4. Je-li S nezávislá množina v G, pak S je klika v $\bar{G}$ a naopak. Proto zřejmě platí

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{G}) &= \omega(G) \\ \omega(\bar{G}) &= \alpha(G). \end{aligned}$$

Poznámka. Klikami a nezávislými množinami se budeme v různých souvislostech zabývat především v druhé části přednášky. Nyní tuto definici budeme potřebovat jen na několika málo místech.

Poznámka. Nechť φ je vlastní $\chi(G)$-vrcholové obarvení grafu $G = (V, E)$, $i \in \widehat{\chi(G)}$. Potom mezi vrcholy z $\varphi^{-1}(i)$ nevede hrana, neboli $\varphi^{-1}(i)$ je nezávislá množina. Tím pádem

$$\#\varphi^{-1}(i) \leq \alpha(G)$$

a přitom platí

$$\bigcup_{i=1}^{\chi(G)} \#\varphi^{-1}(i) = V.$$

Věta 0.1.5. *Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom platí*

$$\begin{aligned} \#V &\leq \alpha(G) \cdot \chi(G) \\ \omega(G) &\leq \chi(G). \end{aligned}$$

Důkaz. První tvrzení plyne okamžitě z předchozí poznámky. Druhé tvrzení je zřejmé: V G existuje klika velikosti $\omega(G)$, jejíž vrcholy musí mít při vlastním obarvení grafu G $\omega(G)$ různých barev. □

Poznámka.

1. Jestliže $H \subset G$, potom $\chi(H) \leq \chi(G)$.
2. Platí-li $G = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_r$, kde G_i jsou komponenty grafu G, potom zřejmě

$$\chi(G) = \max_{i \in \hat{r}} \chi(G_i).$$

Věta 0.1.6. *Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Důkaz. Tvrzení je formálně shodné s Vizingovou větou **??** pro hranovou barevnost. Zde je však důkaz snadný. „Poctivě“ jej lze provést indukcí podle $n = \#V$.

Pro $n = 1$ je to jasné: $\Delta(G) = 0$, $\chi(G) = 1 = \Delta(G) + 1$.

Indukční krok $n - 1 \to n$: V G najdeme vrchol $u \in V$ takový, že $d_G(u) = \Delta(G)$. Samozřejmě je $\Delta(G \backslash u) \leq \Delta(G)$. Z indukčního předpokladu je $\chi(G \backslash u) \leq \Delta(G \backslash u) + 1 \leq \Delta(G) + 1$. Najdeme tedy vlastní obarvení grafu $G \backslash u$ pomocí $\Delta(G) + 1$ barev. Pokud nyní přidáme zpět vrchol u, který má $\Delta(G)$ sousedů, bude možné jej rovněž obarvit jednou z $\Delta(G)+1$ barev. Celý G je tak obarven pomocí $\Delta(G)+1$ barev. □

Poznámka. Myšlenku předchozího důkazu lze shrnout jednoduše: Postupně barvíme jeden vrchol za druhým první dostupnou barvou. Nikdy se nemůže stát, že bychom neměli k dispozici žádnou volnou barvu, protože každý vrchol má méně sousedů, než kolik máme barev.

Poznámka. Dolní odhad na $\chi(G)$ není možné pomocí $\Delta(G)$ nijak vyjádřit:

- Úplný graf K_n na n vrcholech má $\chi(K_n) = n = \Delta(G) + 1$.
- Úplný bipartitní graf na $1 + (n - 1)$ vrcholech, tj. graf S_{n-1} (viz definice **??**) má $\Delta(S_{n-1}) = n - 1$, ale $\chi(G) = 2$.

Věta 0.1.7. *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:*

1. $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$,
2. $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$.

Připravíme si dvě pomocná tvrzení, z nichž již plynou jednotlivé nerovnosti.

Lemma 0.1.8. *Buďte $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ dva grafy. Potom platí*

$$\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2).$$

Důkaz. Zřejmě platí $\chi(G_1) = \chi(\tilde{G}_1)$, kde $\tilde{G}_1 = (V_1 \cup V_2, E_1)$, a stejně $\chi(G_2) = \chi(\tilde{G}_2)$, kde $\tilde{G}_2 = (V_1 \cup V_2, E_2)$. BÚNO je proto možné předpokládat $V_1 = V_2 (:= V)$.

Z předpokladu existují obarvení grafů G_1 a G_2

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: V \mapsto \{1, 2, ..., \chi(G_1)\}, \\ \varphi_2 &: V \mapsto \{1, 2, ..., \chi(G_2)\}. \end{aligned}$$

Najdeme obarvení grafu $G_1 \cup G_2$ pomocí $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$ barev. Definujme nyní pro každé $v \in V$

$$\psi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v)).$$

Potom pro každé $u, v \in V$ platí $(\psi(u) = \psi(v)) \Rightarrow (\varphi_1(u) = \varphi_1(v) \wedge \varphi_2(u) = \varphi_2(v)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\{u, v\} \notin E_1 \wedge \{u, v\} \notin E_2) \Rightarrow \{u, v\} \notin E_1 \cup E_2$. Zobrazení ψ je

$$\psi : V \mapsto \{1, 2, ..., \chi(G_1)\} \times \{1, 2, ..., \chi(G_2)\}.$$

Obor hodnot zobrazení ψ je však (množinově) izomorfní s množinou $\{1, 2, ..., \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)\}$. Abychom korektně definovali vrcholové obarvení grafu $G_1 \cup G_2$, označme

$$B : \{1, 2, ..., \chi(G_1)\} \times \{1, 2, ..., \chi(G_2)\} \mapsto \{1, 2, ..., \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)\}$$

bijekci mezi uvedenými množinami. Potom lze pro každé $v \in V$ definovat $\chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$-vrcholové obarvení grafu $G_1 \cup G_2$ takto:

$$\varphi(v) = B(\psi(v)).$$

Pro φ platí $(\forall u, v \in V)\, (\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow \{u, v\} \notin E_1 \cup E_2)$, takže se skutečně jedná o vrcholové obarvení. □

Důsledek. *Platí tvrzení* (2) *věty 0.1.7.*

Důkaz. Protože $G \cup \bar{G} = K_n$, tak

$$n = \chi(K_n) = \chi(G \cup \bar{G}) \leq \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}).$$

□

Lemma 0.1.9. *Buď $G = (V, E)$ graf. Nechť existuje disjunktní rozklad množiny vrcholů $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k$ takový, že*

$$\left(\forall i, j \in \hat{k}, i \neq j\right) (\exists u \in V_i)\, (\exists v \in V_j)\, (\{u, v\} \notin E)\,.$$

Potom $\chi(G) \leq n + 1 - k$.

Důkaz. Indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $\chi(G) \leq n + 1 - 1 = n$, což je pravda.

Indukční krok $k - 1 \to k$: Platí $\chi(G \backslash V_k) = (n - \#V_k) + 1 - (k - 1) = (n - \#V_k) + 2 - k$. Nyní vezmeme $\#V_k$ nových barev a obarvíme vrcholy z V_k těmito barvami, každý vrchol jinou barvou. Máme tak obarvený celý graf, a to $\leq (n - \#V_k) + 2 - k + \#V_k = n + 2 - k$ barvami. Pokud je tento počet barev $\leq n + 1 - k$, je hotovo. Jestliže je použito právě $n + 2 - k$ barev, musíme pokračovat a obarvení upravit. Z předpokladu platí

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., k - 1\})\, (\exists x_i \in V_i)\, (\exists y_i \in V_k)\, (\{x_i, y_i\} \notin E)\,.$$

Množina $V \backslash \{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ má počet vrcholů $n - (k - 1) = n + 1 - k$, což je méně, než počet použitých barev. Proto existuje barva b, která se vyskytuje pouze na vrcholech $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$. Této barvy se zbavíme tak, že každý vrchol x_i ($i \in \{1, ..., k - 1\}$), který má barvu b, přebarvíme na barvu vrcholu y_i. Potom nové obarvení je stále vlastní. $\{x_i, y_i\}$ totiž nejsou v hraně, a i kdyby různým x_i, x_j příslušel stejný vrchol $y_i = y_j$, potom, protože oba vrcholy x_i, x_j měly stejnou barvu b, lze je opět obarvit stejnou barvou - barvou vrcholu y_i. □

Důsledek. *Platí tvrzení* (1) *věty 0.1.7.*

Důkaz. Označme $k = \chi(G)$. Nechť φ je vlastní k-vrcholové obarvení G. Pro každé $i \in \hat{k}$ označme

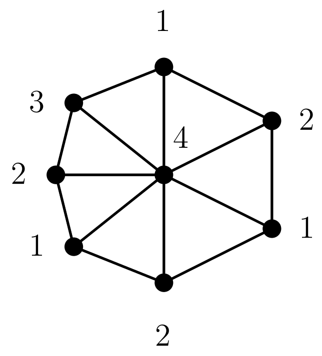
$$V_i := \varphi^{-1}(i).$$

Potom platí, že

$$\left(\forall i, j \in \hat{k}, 1 \leq i \leq j \leq k\right) (\exists u \in V_i)\, (\exists v \in V_j)\, (\{u, v\} \in E)\,. \tag{0.1.1}$$

Kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby

$$\left(\exists i, j \in \hat{k}, 1 \leq i \leq j \leq k\right) (\forall u \in V_i)\, (\forall v \in V_j)\, (\{u, v\} \notin E)\,,$$



Obrázek 0.1.1: 4-kritický graf

bylo by možné vrcholy z V_i i z V_j obarvit stejnou barvou, a tak by $\chi(G) < k$, což je spor. Vezměme nyní graf $\bar{G}$ a definujme na něm stejný rozklad $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Potom z (0.1.1) vznikne pro graf $\bar{G}$ přímo předpoklad lemmatu. Proto

$$\chi(\bar{G}) \leq n + 1 - k = n + 1 - \chi(G),$$

což už je první tvrzení věty 0.1.7. □

0.1.1 k-kritické grafy

Definice 0.1.10. Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je k-**kritický**, jestliže $\chi(G) = k$ a pro každý vlastní podgraf $H \subsetneqq G$ je $\chi(H) < \chi(G)$.

Pozorování 0.1.11. *k-kritický graf je souvislý.*

Důkaz. Víme, že má-li G komponenty $G_1, ..., G_r$, tak potom

$$\chi(G) = \max_{i \in \hat{r}} \chi(G_i).$$

Je-li $r \geq 2$, existuje jedna nebo více komponent, které lze z grafu G odebrat, aniž se sníží jeho barevnost. Proto takový G není k-kritický. □

Poznámka 0.1.12.

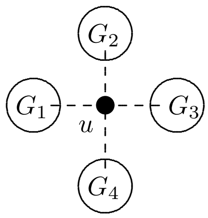
- 1-kritický graf je $G = \{\{v\}, \emptyset\}$.
- 2-kritický graf je $G = \{\{u, v\}, \{\{u, v\}\}\}$.
- 3-kritický graf je C_{2n-1} (kružnice liché délky).

Důkaz. První dvě tvrzení jsou zřejmá. Dále víme, že $\chi(G) = 2$, právě když G je bipartitní graf. 3-kritický graf tedy nesmí být bipartitní, ale odebráním čehokoliv z něj musí bipartitní graf vzniknout. Jediný graf, který to splňuje, je kružnice liché délky bez dalších odboček. □

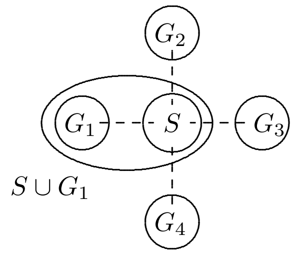
Poznámka. 4-kritický graf vidíme na obrázku 0.1.1. Odebereme-li totiž hranu z obvodu, lze vrcholy po obvodě obarvit jen barvami 1 a 2 a vrchol uprostřed barvou 3. Odebereme-li hranu vedoucí do středu, obarvíme vrcholy po obvodu kromě vrcholu v_0, ze kterého jsme odebrali hranu, barvami 1 a 2. Vrchol v_0 a střed pak obarvíme barvou 3.

Poznámka 0.1.13. Každý graf G s barevností $k = \chi(G)$ obsahuje k-kritický podgraf.

Důkaz. Stačí z G postupně odebírat hrany takové, že neklesne barevnost. Jestliže už to nejde, máme k-kritický podgraf G. □



Obrázek 0.1.2: Jednoprvkový řez grafem



Obrázek 0.1.3: K důkazu věty 0.1.16

Věta 0.1.14. *Nechť $G = (V, E)$ je k-kritický graf. Potom $\delta(G) \geq k - 1$.*

Důkaz. Sporem: nechť $(\exists u \in V)\,(d_G(u) \leq k - 2)$. Potom z u vede méně hran, než kolik je potřeba barev na obarvení G, a to alespoň o 2. Při každém vlastním obarvení není barva u určena jednoznačně. Odeberme tedy vrchol u. Z k-kritičnosti G lze zbytek grafu obarvit $k - 1$ barvami. Jestliže nyní přidáme vrchol u zpět, lze dát vrcholu u alespoň 2 různé barvy z dostupných k barev. Proto nemusíme nutně vybrat novou (k-tou) barvu a G se nám podaří obarvit $k - 1$ barvami, což je spor. □

Definice 0.1.15. Řekneme, že množina $S \subset V$ je **řezem** (angl. *cut*) v grafu $G = (V, E)$, jestliže pro počty komponent platí $c(G) < c(G \backslash S)$.

Poznámka. Když $S = \{u\}$ je řez v souvislém grafu, pak graf musí vypadat jako na obrázku 0.1.2.

Věta 0.1.16. *Řez k-kritického grafu není klika.*

Důkaz. Sporem: nechť G je k-kritický, S je řez v G a zároveň klika v G. Předpokládejme, že $S = \{v_1, ..., v_r\}$, tj. $\#S = r$. Každé vlastní k-vrcholové obarvení musí přiřadit vrcholům z S r různých barev. Nechť $G \backslash S = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_s$. Potom vezmeme pro každé $i \in \hat{s}$ podgrafy $S \cup G_i$ (viz. obrázek 0.1.3) a obarvíme je $k - 1$ barvami tak, aby barvy použité na vrcholech S byly právě barvy $1, 2, ..., r$. (Víme, že existuje vlastní $(k - 1)$-vrcholové obarvení těchto podgrafů, takže dodatečný požadavek lze zajistit jen vhodnou permutací barev.) Jestliže nyní všechny takto obarvené komponenty sjednotíme, získáme vlastní $(k - 1)$-vrcholové obarvení grafu G, což je spor.

□

Poznámka. V předchozím důkazu je skutečně důležité, aby S byla klika. Pokud budeme stejně postupovat v případě obecné S, může se stát, že vlastní $(k - 1)$-vrcholové obarvení podgrafů $S \cup G_i$ vynucuje, aby některé prvky S byly obarveny stejnou barvou, přičemž pro různá $i \in \hat{s}$ se jedná o různé prvky. Nebude potom možné vhodně zpermutovat barvy, aby vrcholy z S měly stejnou barvu nezávisle na i.

0.1.2 Brooksova věta

Lemma 0.1.17. *Nechť G je k-kritický graf s řezem $S = \{u, v\}$. Potom platí*

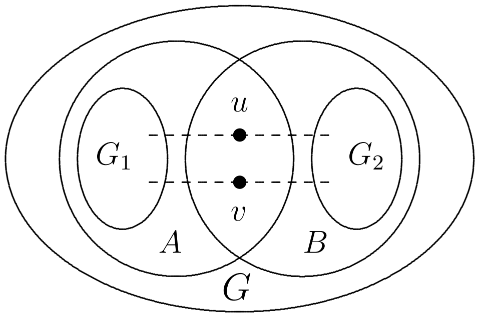
$$d_G(u) + d_G(v) \geq 3k - 5.$$

Důkaz. Než dokážeme samotnou nerovnost, připravíme si tři pomocná tvrzení. Mějme při tom na paměti, že vrcholy u, v nejsou podle předchozí věty 0.1.16 spojeny hranou.

Tvrzení 1.

Graf $G \backslash \{u, v\}$ (kde $\{u, v\}$ nemá smysl hrany, ale množiny vrcholů odebírané z $V(G)$) se skládá z právě 2 komponent $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ takových, že

- *Každé vlastní $(k-1)$-vrcholové obarvení (vlastního) indukovaného podgrafu $A = G[V_1 \cup \{u, v\}]$ přiřazuje vrcholům u, v stejnou barvu. (Jinými slovy: barvíme-li A pomocí $k-1$ barev, musíme dát u a v stejnou barvu)*
- *Každé vlastní $(k-1)$-vrcholové obarvení (vlastního) indukovaného podgrafu $B = G[V_2 \cup \{u, v\}]$ přiřazuje vrcholům u, v různou barvu.*



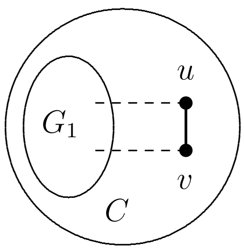
Důkaz tvrzení 1:

Zpočátku nevíme, zda $G \backslash \{u, v\}$ obsahuje *jen* dvě komponenty. Lze však tvrdit, že $G \backslash \{u, v\}$ musí obsahovat alespoň jednu komponentu s vlastností komponenty G_1. Kdyby to tak nebylo, mohli bychom každý podgraf grafu G indukovaný vrcholy jedné z komponent a vrcholy u, v obarvit $k-1$ barvami tak, že u a v by měly různé barvy. Potom bychom barvy zpermutovali tak, aby u, v měly vždy barvy $1, 2$. Takto obarvené podgrafy bychom sjednotili a získali tak celý graf G obarvený $k-1$ barvami, což je spor.

Ze stejného důvodu obsahuje $G \backslash \{u, v\}$ alespoň jednu komponentu s vlastností G_2. Nyní si tyto komponenty označíme přímo jako G_1 a G_2. Ukážeme, že žádné jiné komponenty už v $G \backslash \{u, v\}$ neexistují: Indukovaný podgraf $A \cup B = G[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$ podle vlastností komponent G_1 a G_2 nejde (vlastním obarvením) obarvit $k-1$ barvami, protože vrcholy u, v nemohou mít současně podle G_1 stejnou a podle G_2 různou barvu. Proto $\chi(A \cup B) = k$. Protože G je k-kritický, musí platit $G = A \cup B$.

Tvrzení 2.

Podgraf $C = A \cup \{\{u, v\}\}$, který vznikne přidáním hrany $\{u, v\}$ do A, je již k-kritický.

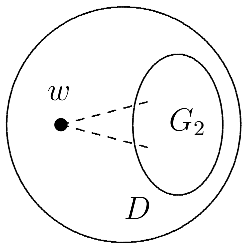


Důkaz tvrzení 2:

Zřejmě platí $\chi(C) = k$, protože A lze obarvit $k-1$ barvami jen tak, že u, v mají stejnou barvu. Když je tedy spojíme hranou, tak už to nejde.

Ubereme-li z G libovolnou hranu, lze jej obarvit $k-1$ barvami. Pokud navíc tato hrana leží v podgrafu A, zůstává ve výsledném grafu celý podgraf B, takže v uvedeném vlastním obarvení musí mít u, v různou barvu. Proto nezáleží na tom, zda je navíc spojíme hranou. Tím jsme dokázali, že po ubrání čehokoliv z C vznikne graf s barevností $k-1$, takže C je k-kritický.

Tvrzení 3.
Označme jako D graf, který vznikne z grafu B sloučením vrcholů u, v do nového vrcholu w. Potom D je k-kritický.



Důkaz tvrzení 3:
Analogicky jako tvrzení 2. $\chi(D) = k$, neboť B lze obarvit $k-1$ barvami, jen když u, v mají různou barvu. Jejich spojením do w však vynucujeme stejnou.

Ubereme-li z G libovolnou hranu, lze jej obarvit $k-1$ barvami. Pokud navíc tato hrana leží v podgrafu B, zůstává ve výsledném grafu celý podgraf A, takže v uvedeném vlastním obarvení musí mít u, v stejnou barvu. Proto (z hlediska obarvení) nezáleží na tom, zda je navíc sloučíme do w. Tím jsme dokázali, že po ubrání čehokoliv z D vznikne graf s barevností $k-1$, takže D je k-kritický.

Nyní konečně můžeme dokázat uvedenou nerovnost. Zřejmě platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} d_G(u) &= d_A(u) + d_B(u), \\ d_G(v) &= d_A(v) + d_B(v), \\ d_C(u) &= d_A(u) + 1, \\ d_C(v) &= d_A(v) + 1, \\ d_D(w) &= d_B(u) + d_B(v). \end{aligned}$$

Protože v k-kritickém grafu platí $\delta \geq k-1$, dostáváme

$$d_G(u) + d_G(v) = d_A(u) + d_B(u) + d_A(v) + d_B(v) =$$

$$= \underbrace{d_C(u)}_{\geq k-1} + \underbrace{d_C(v)}_{\geq k-1} - 2 + \underbrace{d_D(w)}_{\geq k-1} \geq 3k-5.$$

□

Věta 0.1.18. (Brooks)
Nechť G je souvislý graf , a přitom G není ani klika ani kružnice liché délky. Potom $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Poznámka. Velmi snadno jsme již dokázali, že pro každý graf platí $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Nyní bude důkaz obtížnější.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že BÚNO lze důkaz provést pouze pro k-kritické grafy. Mějme tedy souvislý graf, ani kliku ani lichou kružnici, který navíc *není* k-kritický. Potom najdeme jeho vlastní k-kritický podgraf H. Platí tedy $\chi(H) = \chi(G) = k$ a zřejmě též $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Mohou nastat následující možnosti:

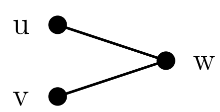
1. H není klika ani lichá kružnice. Potom použijeme naše tvrzení dokázané pro k-kritické grafy: $\chi(H) \leq \Delta(H)$. Z toho plyne
$$\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) = \Delta(G).$$

2. H je klika. Naše tvrzení použít nemůžeme, zato je nyní zřejmě $\Delta(H) < \Delta(G)$, protože H je vlastním podgrafem souvislého grafu G. Protože pro libovolný graf $\tilde{G}$ platí $\chi(\tilde{G}) \leq \Delta(\tilde{G}) + 1$, tak
$$\chi(G) = \chi(H) \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G).$$
3. H je lichá kružnice. Zde je zdůvodnění obdobné tomu v předchozím bodě: Každý vrchol grafu H má stupeň 2 a tak $\Delta(H) = 2$. Protože ale G je souvislý a H je vlastním podgrafem G, tak v G musí být na nějaký vrchol z kružnice H napojena alespoň jedna další hrana. To opět znamená $\Delta(H) < \Delta(G)$, zbytek je stejný.

Nyní dokážeme samotné tvrzení pouze pro k-kritické grafy, které ovšem budeme označovat opět jako „G“. Platí tedy $k = \chi(G)$. Podle poznámky 0.1.12 je zřejmé, že $k \geq 4$, protože jinak by nebyly splněny předpoklady věty. Mohou nastat dvě možnosti:

a) Nechť v G existuje řez $S = \{u, v\}$. Potom podle předchozí věty platí
$$2\Delta(G) \geq d_G(u) + d_G(v) \geq 3k - 5 = 2k - 1 + \underbrace{k - 4}_{\geq 0} \geq 2k - 1.$$
Na levé straně nerovnosti však máme sudé číslo a na pravé straně je liché číslo. Proto samozřejmě musí platit i $2\Delta(G) \geq 2k$, neboli
$$\Delta(G) \geq k = \chi(G).$$

b) Nechť v G neexistuje dvouprvkový řez. To znamená, že po odebrání libovolných dvou vrcholů u, v zůstává graf $G \backslash \{u, v\}$ souvislý. Z předpokladu „G není klika“ najdeme v G vrcholy u, v, které nejsou spojeny hranou, takže jejich vzdálenost $d(u, v) \geq 2$. Tím pádem najdeme u, v i tak, že $d(u, v) = 2$. Označme jako w vrchol, přes který jsou spojeny.



Nyní očíslujeme vrcholy grafu G speciálním způsobem.

- Označíme $v_1 = u, v_2 = v, v_n = w$.
- $v_3, v_4, v_5, ..., v_n = w$ budou vrcholy grafu $G \backslash \{u, v\}$ uspořádané tak, že
$$(\forall i \in \{3, 4, ..., n-1\}) \, (\exists j > i) \, (\{v_i, v_j\} \in E) \, ,$$
neboli z každého vrcholu $v_3, v_4, v_5, ..., v_{n-1}$ vede v grafu $G \backslash \{u, v\}$ hrana do nějakého vrcholu, který je v uspořádání až za ním. Takové uspořádání vznikne například tak, že vrcholy $v_3, v_4, v_5, ..., v_n$ seřadíme sestupně podle jejich vzdálenosti od vrcholu w v grafu $G \backslash \{u, v\}$, tj. budou splňovat
$$(\forall i, j \in \{3, 4, ..., n\}) \left(i < j \Rightarrow d_{G \backslash \{u,v\}}(v_i, w\} \geq d_{G \backslash \{u,v\}}(v_j, w\} \right) .$$
V tom případě zřejmě $v_n = w$.

Takto uspořádané vrcholy $v_1, ..., v_n$ grafu G už lze obarvit nejvýše $\Delta(G)$ barvami, a to takto:

- Vrcholy $v_1 = u, v_2 = v$ dostanou barvu 1, což je možné, neboť spolu nesousedí.
- Vrcholy $v_3, v_4, ..., v_{n-1}$ obarvujeme postupně první barvou, kterou je možné použít. Protože z každého z nich vede hrana do ještě neobarvených vrcholů, má každý z nich ve chvíli, když na něj přijde řada, nejvýše $\Delta(G) - 1$ již obarvených sousedů, a tak existuje barva $b \in \{1, 2, ..., \Delta(G)\}$, kterou jej lze obarvit.

- Vrchol $v_n = w$ sousedí s vrcholy u, v, které mají oba barvu 1, a dále s nejvýše $\Delta(G) - 2$ dalšími vrcholy, které mají nejvýše $\Delta(G) - 2$ různých barev. Celkem tedy sousedí s nejvýše $\Delta(G)$ vrcholy, které mají nejvýše $\Delta(G) - 1$ různých barev, a tak jej lze také obarvit.

$\square$