1. Konvergence na prostoru náhodných veličin

Definice 1. Buď $(X_n)_1^\infty$ posloupnost náhodných veličin. Potom X_n konverguje k X podle pravděpodobnosti — značíme $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ — pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega|\,|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Věta 2. Pro limitu podle pravděpodobnosti platí:

(1) Jestliže $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ a $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$, pak $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{P}} X + Y$.
(2) Jestliže $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, pak $X_n - X \xrightarrow{\text{P}} 0$.
(3) Jestliže $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, pak $\alpha X_n \xrightarrow{\text{P}} \alpha X$.
(4) Jestliže $X_n \xrightarrow{\text{P}} K$, pak $X_n^2 \xrightarrow{\text{P}} K^2$.
(5) Jestliže $X_n \xrightarrow{\text{P}} a$ a $Y_n \xrightarrow{\text{P}} b$, pak $X_nY_n \xrightarrow{\text{P}} ab$.
(6) Jestliže $X_n \xrightarrow{\text{P}} a$ a $Y_n \xrightarrow{\text{P}} b$, pak $X_n/Y_n \xrightarrow{\text{P}} a/b$.

Důkaz. (1) Platí

$$\{\omega|\,|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon\} \subset \{\omega|\,|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \left\{\omega \,\middle|\, |X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \,\middle|\, |Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Dále z Booleovy nerovnosti vyplývá, že

$$P(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}).$$

(2) $P(|X_n - X - 0| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$.
(3) $P(|\alpha X_n - \alpha X| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{a})$.
(4) $P(|X_n - 0|^2 \geq \varepsilon) = P(|X_n| \geq \sqrt{\varepsilon})$. Potom pokud $X_n - K \xrightarrow{\text{P}} 0$, pak $Z_n = (X_n - K)^2 \xrightarrow{\text{P}} 0$, $Z_n = X_n^2 - 2KX_n + K^2 \xrightarrow{\text{P}} 0$. Dále označme $U_n = 2KX_n - K^2$. Protože $X_n \xrightarrow{\text{P}} K$, platí $2KX_n \xrightarrow{\text{P}} 2K^2$ a $2KX_n - K^2 \xrightarrow{\text{P}} K^2$. Konečně $X_n^2 = Z_n + U_n \xrightarrow{\text{P}} K^2$.
(5) Z předchozích pravidel vyplývá, že

$$X_nY_n = \frac{1}{4}((X_n + Y_n)^2 - (X_n - Y_n)^2) \xrightarrow{\text{P}} \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2) = ab.$$

(6) Nejprve dokážeme, že $X_n \xrightarrow{\text{P}} 1 \implies \frac{1}{X_n} \xrightarrow{\text{P}} 1$: Platí, že

$$\left\{\left|\frac{1}{X_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{1}{X_n} \leq 0\right\} \cup \left\{0 \leq \frac{1}{X_n} \leq 1 - \varepsilon\right\} \cup \left\{1 + \varepsilon \leq \frac{1}{X_n}\right\}.$$

Z Booleovy nerovnosti

$$P\left(\left|\frac{1}{X_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\frac{1}{X_n} \leq 0\right) + P\left(0 \leq \frac{1}{X_n} \leq 1 - \varepsilon\right) + P\left(1 + \varepsilon \leq \frac{1}{X_n}\right).$$

Dále platí

$$P\left(\frac{1}{X_n} \leq 0\right) = P\left(X_n \leq 0\right) \leq P(X_n \leq 0) + P(X_n \geq 2) =$$
$$= P(|X_n - 1| \geq 1) \to 0,$$

$$P\left(0 < \frac{1}{X_n} \leq 1 - \varepsilon\right) = P\left(X_n - 1 \geq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) \to 0,$$

$$P\left(\frac{1}{X_n} \geq 1 + \varepsilon\right) = P\left(1 - X_n \geq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) \to 0.$$

Potom $\frac{Y_n}{b} \xrightarrow{\text{P}} 1$, podle lemmatu $\frac{b}{Y_n} \xrightarrow{\text{P}} 1$ a z předchozích pravidel pak $\frac{1}{a}X_n\frac{b}{X_n} \xrightarrow{\text{P}} 1$.

□

Příklad. Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid $\sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i.$$

Ukážeme, že $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$. Pro Y_n platí $Y_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

$$\begin{aligned}
P(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) &= 1 - P(|Y_n - n| < \varepsilon) = \\
&= 1 - \int\limits_{S_n : |y_n - \mu| < \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \exp\left(-\frac{(y_n - \mu)^2 n}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y_n = \\
&= 1 - \int\limits_{-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \to 1 - \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Definice 3. Posloupnost náhodných veličin X_n konverguje skoro jistě ($X_n \xrightarrow{\text{s.j.}} X$), právě když

$$P\left\{\omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1.$$

Definice 4. Posloupnost náhodných veličin X_n konverguje podle α-středu ($X_n \xrightarrow[\alpha]{\mathrm{S}} X$), právě když $E\,|X_n - X|^\alpha \to 0$.

Definice 5. Posloupnost náhodných veličin X_n konverguje v distribuci ($X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$), právě když $F_{X_n}(x) \to F_X$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde F_X je spojitá.

Definice 6. Kolmogorovova vzdálenost distribučních funkcí

$$K(F, G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|\,.$$

Píšeme $X_n \xrightarrow{\mathrm{K}} X$, právě když $K(F_{X_n}, F_X) \to 0$.

Věta 7. Buď X_n posloupnost náhodných veličin. Potom platí:

(1) $X_n \xrightarrow[\alpha=2]{\mathrm{S}} X \implies X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$;

(2) $X_n \xrightarrow{\text{s.j.}} X \implies X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \implies X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Důkaz. (1) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, potom

$$\begin{aligned}
P\{|X_n - x| \geq \varepsilon\} &= \int\limits_{S : |x_n - x| \geq \varepsilon} f_{X_n, X}\, \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int\limits_{S : |x_n - x| \geq \varepsilon} \underbrace{\frac{(x_n - x)^2}{\varepsilon^2}}_{\geq 1} f_{X_n, X}\, \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_n - x)^2 f_{X_n, X} = \frac{1}{\varepsilon^2} E(X_n - X)^2.
\end{aligned}$$

(2) (a)

$$\begin{aligned}
F_{X_n(x)} &= P(X_n \leq x) = \\
&= P(X_n \leq x \wedge |X_n - X| < \varepsilon) + P(X_n \leq x \wedge |X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq P(X - \varepsilon < x \wedge |X_n - X| < \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)
\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $\limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$. Analogicky se dokáže, že $F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon) - P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ a $\liminf F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon)$.
Pokud je x bod spojitosti F_X, pak $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$.

(b) $X_n \xrightarrow{\text{s.j.}} X$, právě když

$$\{\omega | X_n \to X\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} \left\{ \omega \,\middle|\, |X_p - X| \leq \frac{1}{k} \right\} = M \text{ a } P(M) = 1.$$

$$P(M^{\mathrm{C}}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{ |X_p - X| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) = 0,$$

z čehož vyplývá, že $\forall k \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{ |X_p - X| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) = 0$$

a z věty o spojitosti pravděpodobnosti

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{ |X_p - X| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) = 0,$$

dále $(\forall k)(\forall \delta)(\exists n_0)(\forall n > n_0)$

$$P\left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{ |X_p - X| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) < \delta,$$

a $(\forall k)(\forall \delta)(\forall p > n_0)$

$$P\left(|X_p - X| \geq \frac{1}{k} \right) < \delta.$$

$\square$