1. Diskrétní náhodné veličiny

Definice 1. Náhodná veličina X je diskrétní, právě když $\operatorname{Ran} X$ je nejvýše spočetná množina.

Definice 2. Pro diskrétní náhodnou veličinu definujeme

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{m:x_m \leq x} P(X = x_m) = \sum_{m=1}^{N,\infty} p_m \mathbf{1}_{[x_m,+\infty)}(x)$$

Definice 3. Frekvenční funkce (hustota pravděpodobnosti) je

$$f(x) = \begin{cases} p_m & x = x_m \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Poznámka. Platí

$$\sum_{m=1}^{N,\infty} p_m = 1.$$

1.1. **Alternativní (Bernoulliho) rozdělení.**
Případ, kdy je

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

a $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$.

1.2. **Diracovo rozdělení.**
$P(X = c) = 1$, $P(X \neq c) = 0$.

1.3. **Binomické rozdělení.**
Experiment se n-krát opakuje, přičemž pravděpodobnost úspěchu je $P(A) = p$, neúspěchu $P(A^{\mathrm{C}}) = 1 - p$. Počet příznivých jevů při n opakováních je

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Pro pravděpodobnost platí

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P\left(\sum_{\#(i_1,\dots,i_k)} \{X_{i_1} = 1, \dots, X_{i_k} = 1, X_{i_{k+1}} = 0, \dots, X_{i_n} = 0\} \right) = \\ &= \sum_{\#(i_1,\dots,i_k)} P(X_{i_1} = 1, \dots, X_{i_k} = 1, X_{i_{k+1}} = 0, \dots, X_{i_n} = 0) = \\ &= \binom{n}{k} \prod_{i=1}^{k} P(x_i = 1) \prod_{k=1}^{n} P(x_i = 0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Z binomické věty také plyne, že

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-k)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

1.4. **Geometrické (Pascalovo) rozdělení.**
Nekonečná posloupnost alternativních pokusů, $P(A) = p$, $P(A^{\mathrm{C}}) = 1 - p$, X je počet pokusů před prvním výskytem jevu A. Platí, že

$$P(X = k) = p(1-p)^k.$$

Také platí, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \frac{1}{1 - (1-p)} = 1.$$

1.5. **Negativně binomické rozdělení.**
Nekonečné opakování, Y je počet neúspěchů před m-tým úspěchem, $P(A) = p$. Potom

$$P(Y = k) = \binom{k + m - 1}{k} p^m (1-p)^k.$$

1.6. **Hypergeometrické rozdělení.** Model: zásobník :-), r červených kuliček, $N-r$ bílých, n-krát opakuji (bez vracení). X je počet červených kuliček v n-tici.

$$P(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

1.7. **Poissonovo rozdělení.**

Definice 4. Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem λ, pokud

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Věta 5 (Poisson)**.** Nechť $np_n\to\lambda$ (nebo $np_n=\lambda$), $\lambda>0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}P_n(x)&=\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{x}p_n^x(1-p_n)^{n-x}=\\&=\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-x}=\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\left(1+\frac{n}{\lambda}o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^x\\&\quad\left(1-\frac{\lambda}{n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-x}=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda},\end{aligned}$$

neboť

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

□

Poznámka. (1)

$$\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}=1$$

(2) Poissonovo rozdělení pro velká n a malá p aproximuje $\mathrm{Bi}(n,p)$.

1.7.1. *Zákon řídkých jevů.*

Věta 6. Nechť $0<t_1<t_2$ a nechť dále platí:

(1) Počet výskytů jevu A v $[t_1,t_2)$ nezávisí na počtu výskytů v $[0,t_1)$.
(2) Pravděpodobnost výskytu jevu A právě jednou v $[t,t+h)$ je $\lambda h+o(h)$ při $h\to 0+$.
(3) Pravděpodobnost výskytu jevu A více než jednou v $[t,t+h)$ je $o(h)$.
(4) Pravděpodobnost $P_n(t)$ výskytu n jevů do času t je diferencovatelná funkce t pro každé n.

Pak

$$P_n(t)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}.$$

Číslo λ se nazývá **intenzita Poissonovského procesu**.

Důkaz. Buď X_t počet událostí v časovém intervalu $[0,t)$, $P(X_t=k)=p_k(t)$.

$$p_0(t+h)=P(X_t=0)P(X_{t+h}-X_t=0)=p_0(t)(1-\lambda h+o(h))$$

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{h\to 0+}\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left(-\lambda p_0(t)+p_0(t)\frac{o(h)}{h}\right)=-\lambda p_0(t)$$

$$
\begin{aligned}
p_k(t+h) &= \sum_{j=0}^{k} P(X_t = j) P(X_{t+h} - X_t = k - j) = \\
&= \sum_{j=0}^{k-2} P(X_t = j) o(h) + P(X_t = k-1)(\lambda h + o(h)) + \\
&\quad + P(X_t = k)(1 - \lambda h + o(h))
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t)
$$

$$
\begin{aligned}
p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) \\
p_k'(t) &= \lambda(p_{k-1}(t) - p_k(t)) \\
p_0(0) &= 1 \\
p_k(0) &= 0
\end{aligned}
$$

$\square$