1. Úvod

1.1. **Prostor elementárních jevů, algebra jevů.**

Definice 1. Označme Ω prostor elementárních jevů, $\omega \in \Omega$ elementární jev, $A \subset \Omega$ jev.

Definice 2. Buďte A, B jevy, potom

- $A = \Omega$ je **jev jistý**.
- A^{C} je **jev opačný** k jevu A. Platí $\omega \in A \veebar \omega \in A^{\mathrm{C}}$.
- $A \cup B$ je jev, kdy nastává A nebo B.
- Pokud A a B nenastávají současně, říkáme, že jde o jevy **navzájem neslučitelné**.
- Jsou-li A, B neslučitelné, píšeme $+$ místo $\cup$: $A + B$.
- $A \subset B$, právě když platí $\omega \in A \implies \omega \in B$.
- $A \cap B$ $(A \cdot B)$ je jev, kdy A a B nastávají současně.
- $\emptyset$ je **jev nemožný**.
- $A = B$, právě když $A \subset B$ a $B \subset A$.
- $A - B$ je jev, kdy A nastane a B nenastane.
- Symetrická diference $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

Pozorování. Je-li $A \cup B = \emptyset$, pak A a B jsou neslučitelné.

Věta 3. Nechť $A, B, C \subset \Omega$ jsou jevy, $N \in \mathbb{N}$ nebo $+\infty$. Pak

(1) $A \subset A$;
(2) $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$;
(3) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;
(4) $A \cup A = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
(6) $\emptyset \subset A \subset \Omega$;
(7) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
(8) $\emptyset \cap A = \emptyset$, $\emptyset \cup A \subset A$;
(9) $\Omega \cap A = A$, $\Omega \cup A = \Omega$;
(10) $(A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}} = A$;
(11) $(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$, $(A \cap B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$;
(12) $A \cup B = A + BA^{\mathrm{C}}$;
(13) $B = AB + A^{\mathrm{C}}B$;
(14) $A \cap (B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(15)
$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = A_1 + \sum_{n=2}^{N} A_1^{\mathrm{C}} \cdot A_{n-1}^{\mathrm{C}} A_n;$$
(16)
$$\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{n=1}^{N} A_n^{\mathrm{C}}, \quad \left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)^{\mathrm{C}} = \bigcup_{n=1}^{N} A_n^{\mathrm{C}};$$
(17) $A \cap A^{\mathrm{C}} = \emptyset$;
(18) $A \cup A^{\mathrm{C}} = \Omega$;
(19) $A \cap (B + C) = AB + AC$.

1.2. **Axiomy pravděpodobnostního prostoru.**

Definice 4. Buď Ω prostor elementárních jevů, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ množina jevů. Požadujeme, aby $\mathcal{A}$ tvořila σ-algebru jevů, tj. aby

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(2) $A \in \mathcal{A} \implies A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$;
(3) $A_1, A_2, \dots, A_\infty \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Poznámka. Ne všechny podmnožiny Ω jsou jevy. To platí pouze u spočetných Ω.

Pozorování. $\Omega \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

Důkaz. (1) $\emptyset \in \mathcal{A} \implies \Omega = \emptyset^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$;
(2) Stačí položit $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$.

□

Věta 5. Buďte $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$. Potom

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

Důkaz. Protože $A_j \in \mathcal{A}$, podle axiomu 2 je $A_j^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$, podle axiomu 3

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \implies \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}.$$

□

Definice 6. Pravděpodobnost P je funkce $P : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ taková, že
(1) $P(A) \geq 0$ pro každé $A \mapsto \mathcal{A}$;
(2) $P(\Omega) = 1$;
(3) Pro každé $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ disjunktní je

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Věta 7. (1) $P(\emptyset) = 0$.
(2)

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

Důkaz. (1) $\Omega \in \mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1$, $\Omega^{\mathrm{C}} = \emptyset$. Protože $\Omega + \emptyset + \emptyset + \cdots = \Omega$, je

$$\sum_{1}^{\infty} P(\emptyset) = 0$$

a $P(\emptyset) = 0$.
(2) Stačí zvolit $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$, potom

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) + 0.$$

□

Věta 8. Buďte $A, B \in \mathcal{A}$. Pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Důkaz. $A \cup B = A + (B \cap A^{\mathrm{C}})$, $P(A \cap B) = P(A) + P(B \cap A^{\mathrm{C}})$; dále platí $B = B \cap A^{\mathrm{C}} + A \cap B$ a $P(B) = P(B \cap A^{\mathrm{C}}) + P(A \cap B)$. Z toho okamžitě vyplývá tvrzení věty. □

Poznámka. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Věta 9 (Booleova nerovnost)**.** $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Důsledek.

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{N,\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{N,\infty} P(A_j)$$

Věta 10. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

Důkaz. $B = A + B \cap A^{\mathrm{C}}$, $P(B) = P(A) + P(B \cap A^{\mathrm{C}})$, přičemž $P(B \cap A^{\mathrm{C}}) \geq 0$. □

Důsledek. $P(A) \leq 1$, neboť $A \subset \Omega$.

Lemma 11 (o spojitosti)**.** Pravděpodobnost je spojitá funkce shora i zdola:

(1) Nechť $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow A$, $(A_n \subset A_{n+1})$, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$. Pak $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.
(2) Nechť $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \searrow A$, $(A_n \supset A_{n+1})$, $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n$. Pak $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Důkaz. (1) Nechť $A_n \searrow \emptyset$, dokážeme, že v tom případě $P(A_n) \to 0$

(a) Existence limity plyne z monotonie pravděpodobnosti $P(A_n) \geq P(A_{n+1})$ a pozitivity $P \geq 0$.
(b) Buď $B_n = A_n - A_{n+1}$, potom

$$A_n = \sum_{j=n}^{\infty} B_j.$$

Protože

$$A_1 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j,$$

a B_j jsou disjunktní, je

$$P(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j).$$

Řada na pravé straně konverguje, proto je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} P(B_j) = 0.$$

(2) Buď $A \neq \emptyset$, $A_n \searrow A \neq \emptyset$. Platí $A_n = (A_n - A) + A$, $P(A_n) = P(A_n - A) + P(A)$. Potom $P(A_n - A) \to 0$ a $P(A_n) \to P(A)$.
(3) Buď $A \neq \emptyset$, $A_n \nearrow A \neq \emptyset$. Platí $A = (A - A_n) + A_n$, $P(A) = P(A - A_n) + P(A_n)$. Potom $P(A - A_n) \to 0$ a $P(A_n) \to P(A)$.

□

1.3. **Podmíněná pravděpodobnost.**

Definice 12. Nechť $P(B) > 0$. Pak podmíněná pravděpodobnost A za předpokladu jevu B je definována jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Věta 13. $P(\cdot|B)$ je pravděpodobnost ve smyslu definice 6.

Důkaz. (1)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0;$$

(2)

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1;$$

(3)

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \,\middle|\, B\right) = \frac{P\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B)\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap B)}{P(B)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$

□

Věta 14 (o násobení pravděpodobnosti)**.** Buďte $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tak, že platí $P(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Pak

$$P(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_0)P(A_1|A_0)P(A_2|A_0 \cap A_1) \cdots P(A_n|A_0 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Důkaz. Platí

$$A_0 \cap \dots \cap A_n \subset A_0 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset \dots \subset A_0$$

a

$$0 < P(A_0 \cap \dots \cap A_n) \leq P(A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leq \dots \leq P(A_0)$$

Pro $n = 1$ je to definice podmíněné pravděpodobnosti. Přechod $n \to n+1$:

$$P(\underbrace{A_0 \cdots A_n}_{B} A_{n+1}) = P(A_0 \cdots A_n)P(A_{n+1}|A_0 \cdots A_n).$$

Pro $P(A_0 \cdots A_n)$ využijeme indukčního předpokladu. □

Věta 15 (o úplnosti)**.** Nechť $(H_n)_{n=1}^N$ tvoří úplný rozklad jistého jevu, tj. $P(H_n) > 0$, H_n jsou disjunktní a

$$P\left(\sum_{j=1}^N H_j\right) = 1.$$

Pak

$$P(A) = \sum_{j=1}^N P(A|H_n)P(H_n).$$

Důkaz.

$$P(A) = P\left(A \cap \left(\sum_{j=1}^N H_j\right)\right) + P\left(A \cap \left(\sum_{j=1}^N H_j\right)^{\mathrm{C}}\right) =$$

$$= P\left(\sum_{j=1}^N (A \cap H_j)\right) + P\left(\left(\sum_{j=1}^N H_j\right)^{\mathrm{C}}\right) = \sum_{j=1}^N P(A \cap H_j)$$

□

Věta 16 (Bayes)**.** Nechť $(H_n)_{j=1}^N$ tvoří úplný rozklad jistého jevu a $P(A) > 0$. Pak

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^N P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Důkaz.

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^N P(A|H_i)P(H_i)}$$

□

1.4. **Stochastická nezávislost jevů.**

Definice 17. Nechť $\mathcal{C}$ značí systém jevů. Jevy z $\mathcal{C}$ nazýváme **nezávislé**, pokud pro každý konečný systém $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ platí $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$.

Věta 18. Buďte A, B nezávislé jevy. Potom A a B^{C} jsou nezávislé.

Důkaz. Protože $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^{\mathrm{C}})$, je $P(A \cap B^{\mathrm{C}}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^{\mathrm{C}})$ □

Důsledek. A^{C} a B^{C} jsou nezávislé.

Věta 19. Buď $P(B) > 0$. Pak A, B jsou nezávislé, právě když $P(A|B) = P(A)$.

Důkaz. Buďte A, B nezávislé, pak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

Nechť $P(A|B) = P(A)$. Potom $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$. □

Poznámka. (1) Buď A jev, B jev takový, že $P(B) = 0$. Pak A, B jsou nezávislé: $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B) = 0 = P(A)P(B)$.
(2) Buď $A \in \mathcal{A}$. Potom A, Ω jsou nezávislé.

Definice 20. Soubor, jehož každé dva prvky jsou nezávislé, nazýváme **párově nezávislý**.

1.5. **Borelovská algebra, borelovsky měřitelné funkce.**

Definice 21. Neprázdný systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá **algebrou**, pokud platí:
(1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
(2) $(\forall E, F \in \mathcal{S})(E \setminus F \in \mathcal{S})$,
(3) $E \cup F \in \mathcal{S}$.

Definice 22 (alternativní)**.** Neprázdný systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá **algebrou**, pokud platí:
(1) $(\forall E \in \mathcal{S})(X \setminus E \in \mathcal{S})$,
(2) $(\forall E, F \in \mathcal{S})(E \cup F \in \mathcal{S})$.

Definice 23. Nechť Z je libovolný systém z 2^X. Definujeme

$$\sigma(Z) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_\alpha,$$

kde $\mathcal{S}_\alpha$ jsou σ-algebry takové, že $Z \subset \mathcal{S}_\alpha$.
Množina $\sigma(Z)$ se nazývá **mininální σ-algebrou** nad systémem Z.

Definice 24. Buď $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{(a_i, b_i) | a_i < b_i \wedge a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$, pak $\sigma(\tau) =: \mathcal{B}_1$ se nazývá **borelovská algebra** a $B \in \mathcal{B}_1$ se nazývá **borelovsky měřitelná**.

Definice 25. **Náhodná veličina** je funkce $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$, $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Definice 26. Buď $A \in \mathcal{A}$. Potom funkce

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

je **charakteristická funkce** A.

Poznámka. (1) Funkce $\mathbf{1}_A$ je náhodná veličina.
(2) Značení: $\{\omega | X(\omega) \in S\} =: \{X \in S\}$.

Věta 27. Funkce $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je náhodná veličina, právě když $(\forall x \in \mathbb{R})(\{X < x\} \in \mathcal{A})$.

Důkaz. □

1.6. **Operace s náhodnými veličinami.**
(1) Sčítání: $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Důkaz, že $X + Y$ je n.v. Dokážeme, že $A = \{\omega | X(\omega) + Y(\omega) < c\} \in \mathcal{A}$ a že

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{X(\omega) \leq r\} \cap \{Y(\omega) \leq c - r\}).$$

(a) $\supset$: triviální.
(b) $\subset$: Nechť $\omega \in A$. Potom $X(\omega) + Y(\omega) < c \iff X(\omega) < c - Y(\omega)$, takže existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že platí $X(\omega) \leq r \leq c - Y(\omega)$, tj. $\omega \in \bigcup$.

□

(2) Násobení konstantou: $(KX)(\omega) = K \cdot X(\omega)$.

Důkaz, že KX je n.v. (a) Pro $K > 0$ je $\{X \leq c/K\} \in \mathcal{A}$.
(b) Pro $K < 0$ je $\{X \geq c/K\} \in \mathcal{A}$.
(c) Pro $K = 0$ je $\emptyset \in \mathcal{A}$ pro $x < 0$ nebo $\Omega \in \mathcal{A}$ pro $c \geq 0$.

□

(3) Násobení: $(XY)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$.

Důkaz, že XY je n.v. Dokážeme, že X^2 je n.v.:

$$\{X^2(\omega) \leq c\} = \begin{cases} \emptyset & c < 0 \\ \{-\sqrt{c} \leq X(\omega) \leq \sqrt{c}\} & c \geq 0 \end{cases}$$

$$\{-\sqrt{c} \leq X(\omega) \leq \sqrt{c}\} = \underbrace{\{X(\omega) \leq \sqrt{c}\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{\sqrt{c} \leq X(\omega)\}}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Dále platí, že $XY = \frac{1}{4}((X+Y)^2 - (X-Y)^2)$, což je podle předchozích závěrů náhodná veličina. □

(4) Dělení: $Y \neq 0$, $(X/Y)(\omega) = X(\omega)/Y(\omega)$.

Důkaz, že X/Y je n.v. Buďte X, Y náhodné veličiny, $\{Y(\omega) = 0\} = \emptyset$.

$$\left\{\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \leq c\right\} = \left\{\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \leq c\right\} \cap \{Y > 0\} + \left\{\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \leq c\right\} \cap \{Y < 0\} =$$

$$= \underbrace{\{X(\omega) \leq cY(\omega)\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y(\omega) > 0\}}_{\in\mathcal{A}} + \underbrace{\{X(\omega) \geq cY(\omega)\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y(\omega) > 0\}}_{\in\mathcal{A}}$$

□

(5) Maximum: $\max\{X, Y\}(\omega) := \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$

Důkaz, že $\max\{X, Y\}$ *je n.v.*

$$\{\max\{X(\omega), Y(\omega)\} \leq c\} = \{X(\omega) \leq c\} \cap \{Y(\omega) \leq c\}.$$

□

(6) Minimum: $\min\{X, Y\} := -\max\{-X, -Y\}$.

Lemma 28. Každou množinu $B \in \mathcal{B}_1$ lze složit z polouzavřených intervalů $(a_i, b_i]$ pomocí operací $\cup$ a $-$.

Věta 29. Buď X náhodná veličina $\Omega \mapsto \mathbb{R}$, g funkce $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná. Pak $g(X)$ je náhodná veličina.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $g^{-1}((-\infty, c]) = B$ je borelovsky měřitelná. Dále platí, že libovolný interval $(a_i, b_i]$ lze zapsat jako $(-\infty, b_i] - (-\infty, a_i]$. Z nich pak lze složit libovolnou borelovskou množinu (bez důkazu):

$$X^{-1}(B) = X^{-1}\left(\overline{\bigcup_i}(a_i, b_i]\right) = \overline{\bigcup_i} X^{-1}(a_i, b_i] = \overline{\bigcup_i}(X^{-1}(-\infty, b_i] - X^{-1}(-\infty, b_i]),$$

kde $\overline{\bigcup}$ je licensia poetica a znamená to kombinaci $\cup$ a $-$. Z toho plyne, že $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. □

Věta 30. Buďte X_i náhodné veličiny (spočetný počet), potom

$$\inf\{X_i | i \in \mathbb{N}\}, \quad \sup\{X_i | i \in \mathbb{N}\}, \quad X = \lim_{i\to\infty} X_i$$

jsou náhodné veličiny.

Věta 31. Pro charakteristickou funkci množiny platí:
(1) $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$;
(2) $\mathbf{1}_\Omega = 1$;

(3) $1 - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A^C}$;
(4) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$;
(5) $\mathbf{1}_{A+B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$;
(6) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

1.7. **Distribuční funkce náhodné veličiny.**

Definice 32. Buď X náhodná veličina. Potom definujeme $F_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leq x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Věta 33. Buď X náhodná veličina, F_X distribuční funkce. Pak
(1) $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$;
(2) $\lim_{n\to\infty} F_X(x) = 1$;
(3) $\lim_{n\to-\infty} F_X(x) = 0$;
(4) $F_X(x)$ je zprava spojitá.

Důkaz. (1) $x_1 \leq x_2 \implies \{\omega | X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$; $P\{X \leq x_1\} \leq P\{X \leq x_2\}$.
(2)
$$\lim_{n\to\infty} F_X(n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{n} \{X \leq n\}\right) = P(\Omega) = 1$$
(3)
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq -n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{n} \{X \leq -n\}\right) = P(\emptyset) = 0$$
(4)
$$\lim_{x\to a+} F_X(x) = \lim_{x\to\infty} F_X\left(a + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \leq a + \frac{1}{2^n}\right) =$$
$$= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{X \leq a + \frac{1}{2^n}\right\}\right) = P(X \leq a) = F_X(a)$$

$\square$

Poznámka.
$$P(X < x) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{X \leq x - \frac{1}{2^n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \leq x - \frac{1}{2^n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} F_X\left(x - \frac{1}{2^n}\right) = F_X(x - 0)$$
$$P(X = a) = P(\{X \leq a\} - \{X < a\}) = F_X(a) - F_X(a-0) = \begin{cases} 0 & F_X \text{ spoj.} \\ > 0 & F_X \text{ diskr.} \end{cases}$$
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-0)$$
$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

Definice 34. Buďte X, Y náhodné veličiny. Definujeme **sdruženou** distribuční funkci $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$.

Věta 35. (1) Buďte $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Pak $F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$.
(2) $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$, $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$;
(3) $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$, $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$
(4) $F_{X,Y}$ je spojitá zprava v každé proměnné.

Důkaz. (1) $\{X \leq x_1\} \cap \{Y \leq y_1\} \subset \{X \leq x_2\} \cap \{Y \leq y_2\}$.

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{n\to\infty} P(\{X \le n\} \cap \{Y \le y\}) &= \\ = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{X \le n\} \cap \{Y \le y\})\right) &= \\ = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le n\}\right) \cap \{Y \le y\}\right) &= P(Y \le y) = F_Y(y)\end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} P(X < -n, Y \le y) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le -n\} \cap \{Y \le y\}\right) = P(\emptyset) = 0$$

(4) Vyplývá z monotonie a věty o spojitosti pravděpodobnosti.

□

Definice 36. Sdruženou distribuční funkci lze definovat i pro n náhodných veličin:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 \le x_1,\ldots,X_n \le x_n).$$

Věta 37. (1) Sdružená distribuční funkce je monotonní;

(2)

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},+\infty) = F_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$
$$F_{X_1,\ldots,X_n}(+\infty,\ldots,+\infty,x_j,+\infty,\ldots,+\infty) = F_{X_j}(x_j);$$

(3) $F_{X_1,\ldots,X_n}(-\infty,x_2,\ldots,x_n) = 0;$

(4) $F_{X_1,\ldots,X_n}(+\infty,\ldots,+\infty) = 1;$

(5) $\Delta^n F_{X_1,\ldots,X_n} \ge 0.$

Definice 38. Buďte $X_1,\ldots,X_n$ náhodné veličiny. Řekneme, že jsou stochasticky nezávislé, pokud pro každé $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ je systém jevů $\{a_i < X_i \le b_i\}$ nezávislý

Věta 39. Buďte $X_1,\ldots,X_m$ náhodné veličiny. Pak $X_1,\ldots,X_m$ jsou nezávislé, právě když

$$F_{X_1,\ldots,X_m}(x_1,\ldots,x_m) = \prod_{j=1}^{m} F_{X_j}(x_j).$$

Důkaz. (1) ($\Rightarrow$) zvolíme $a_i = -\infty$, $b_i = x_i$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{-\infty < X_i \le x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{m} P(-\infty < X_i \le x_i)$$

(2) ($\Leftarrow$) Buď $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$. Potom

$$\begin{aligned}&P(a < X_1 < b_1 \cap a_2 < X_2 \le b_2) = \\ &= F_{X_1,X_2}(b_1,b_2) - F_{X_1,X_2}(a_1,b_2) - F_{X_1,X_2}(b_1,a_2) + F_{X_1,X_2}(a_1,a_2) = \\ &= [F_{X_1}(b_1) - F_{X_1}(a_1)][F_{X_2}(b_2) - F_{X_2}(a_2)] = P(a_1 < X_1 \le b_1)P(a_2 < X_2 \le b_2).\end{aligned}$$

□