1 Axiomatická definice pravděpodobnosti

1.1 Jevy a operace s nimi

Jedním ze základních pojmů teorie pravděpodobnosti jsou jevy a operace s nimi pojaté jako operace s množinami. Uvažujme pokus, a označme

Ω Množinu všech možných výsledků pokusu, tzv. elementárních jevů. Tuto množinu nazýváme *prostor elementárních jevů*, *základní pravděpodobnostní prostor*, *výběrový prostor*, apod.

$\omega \in \Omega$ Prvky prostoru elementárních jevů nazýváme *elementárními jevy.*

$A \subset \Omega$ Libovolnou podmnožinu nazýváme *jev.*

Říkáme že jev $A \subset \Omega$ nastal, pokud nastal elementární jev $\omega \in A$. Jev Ω nazýváme *jevem jistým* a $\emptyset$ nazýváme *jevem nemožným.*

Definice 1.1. *Buď Ω prostor elementárních jevů a $A, B \subset \Omega$ jevy. Potom definujeme:*

1. $A^{\mathbb{C}}$ - ***jev opačný**, který nastává právě tehdy když nenastává A, tj.*

$$\omega \in A^C \Leftrightarrow \omega \notin A$$

2. $A \cup B$ - ***sjednocení jevů**, nastává právě když nastává alespoň jeden z jevů A, B.*
3. $A \cap B$ - ***průnik jevů**, nastává právě když nastávají oba jevy A, B současně.*
4. *Říkáme že jevy A, B jsou **neslučitelné**, pokud $A \cap B = \emptyset$. Potom také píšeme $A \cup B = A + B$.*
5. $A \subset B$ - *jev A je **podjevem** jevu B, právě když*

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

6. $A = B$ - *jevy jsou **ekvivalentní**, pokud $A \subset B \wedge B \subset A$*
7. $A - B$ - *nastává jev A, ale nenastává jev B. Platí $A - B = A \cap B^C$.*
8. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ - ***symetrická diference***

Věta 1.2. *Nechť $A, B, C \subset \Omega$ jsou jevy. Potom platí:*

1. $A \subset A$ *Dk:* $\omega \in A \Rightarrow \omega \in A$
2. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ *Dk:* $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B \Rightarrow \omega \in C$
3. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ *Dk:* $\omega \in A \Rightarrow \omega \in A$, $\omega \in A \vee \omega \in A \Rightarrow \omega \in A$
4. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(komutativita)*
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociativita)*
6. $\emptyset \subset A \subset \Omega$
7. $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

8. $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$
9. $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$
10. $\left(A^C\right)^C = A$
11. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ *(de Morganovy zákony)*
12. $(A \cup B) = A + B \cap A^C$
13. $B = (A \cap B) + (A^C \cap B)$
14. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivita)*
15. $A \cup A^C = \Omega$
16. $A \cap A^C = \emptyset$ *(zákon vyloučeného středu)*
17. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$

Věta 1.3. *Buďte* $\{A_k\}_{k=1}^{N,+\infty}$ *jevy. Potom platí:*

1. $\bigcup_{n=1}^{N,+\infty} A_k = A_1 + \sum_{k=2}^{N,+\infty} A_1^C A_2^C \dots A_{k-1}^C A_k \quad (AB = A \cap B)$
2. $\left(\bigcup_{n=1}^{N,+\infty} A_k\right)^C = \bigcap_{k=1}^{N,+\infty} A_k^C$, $\left(\bigcap_{n=1}^{N,+\infty} A_k\right)^C = \bigcup_{k=1}^{N,+\infty} A_k^C$ *(de Morganovy zákony pro nejvýše spočetný systém jevů)*

1.2 Algebraická struktura jevů

Jevy a operace s nimi, tak jak byly definovány v předchozím oddíle, je možno uspořádat do tzv. *Booleovy algebry*, definované dále.

Definice 1.4 (Booleova algebra)**.** *Booleovou algebrou nazýváme strukturu* $(\mathcal{A}, +, \cdot, \mathbb{C})$*, kde* $\mathcal{A}$ *je množina jevů,* $+$ *a* $\cdot$ *jsou binární operace,* $\mathbb{C}$ *je operace unární a ve které platí následující axiomy. Nechť* $A, B, C \in \mathcal{A}$ *a nechť platí*

1. $A + A = A$
2. $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
4. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$, $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
5. $A + \mathbb{C}A = 1$, $A \cdot \mathbb{C}A = 0$
6. $A + 0 = A$, $A \cdot 0 = 0$
7. $A + 1 = 1$, $A \cdot 1 = A$

S Booleovými algebrami (a algebrami obecně) se blíže seznámíte v přednášce "Algebra", zatím nám bude stačit, že se jedná o množinu, ke které jsou přiřazeny algebraické operace a množina je vůči nim uzavřená. Pokud budeme uvažovat množinu všech elementárních jevů Ω, ke které přiřadíme operace $\cup, \cap, \mathbb{C}$, tj. sjednocení, průnik a doplněk, potom jsou zřejmě všechny předpoklady definice splněny a $(\Omega, \cup, \cap, \mathbb{C})$ je booleovská algebra. V souladu s touto skutečností budeme někdy průnik značit $\cdot$, případně ho budeme zapisovat $A \cap B = AB$. Nahrazení znaku sjednocení součtem si však dovolit nemůžeme, protože operaci + jsme si již vyhradili pro sjednocení neslučitelných jevů.

Vyvstává však otázka, zda není možné zvolit nějaký systém podmnožin Ω a úvahy provádět na něm. Odpověď zní ano, takový systém je možno volit a tento systém nazýváme σ-algebrou.

Definice 1.5 (množinová algebra)**.** *Buď Ω libovolná neprázdná množina a buď $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$. Potom říkáme, že $\mathcal{A}$ je množinová algebra, pokud*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Definice 1.6 (σ-algebra)**.** *Buď Ω libovolná neprázdná množina a buď $\mathcal{A} \subset \Omega$ systém podmnožin ($\mathcal{A} \subset 2^\Omega$). Potom říkáme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra, pokud*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A^{\mathbb{C}} \in \mathcal{A})$
3. $((A_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{A})$

Každá σ-algebra je tedy uzavřená vůči doplňkům a spočetným sjednocením a obsahuje prázdnou množinu. Přímo z definice vyplývají následující vlastnosti:

Věta 1.7. *Buď $\mathcal{A}$ σ-algebra jevů. Potom platí:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $(A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A})$
3. $((A_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcap_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{A})$
4. $(A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A})$

Důkaz.

1. $(\emptyset \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\emptyset^{\mathbb{C}} = \Omega \in \mathcal{A})$
2. Buďte $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, dodefinujme $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots = \emptyset$. Potom ale platí $(A_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{A}$, a můžeme tedy použít uzavřenost σ-algebry $\mathcal{A}$ vůči nekonečnému sjednocení. Potom tedy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$$

3. Buď $(A_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$. Podle de Morganových zákonů pro spočetný systém množin platí

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathbb{C}} \right)^{\mathbb{C}}$$

a potom

$$(A_k \in \mathcal{A}) \Rightarrow \left(A_k^{\mathbb{C}} \in \mathcal{A} \right) \Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathbb{C}} \in \mathcal{A} \right) \Rightarrow \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathbb{C}} \right)^{\mathbb{C}} \in \mathcal{A} \right)$$

a dle de Morganova zákona tedy

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathbb{C}} \right)^{\mathbb{C}} \in \mathcal{A}$$

4. Tento bod dokážeme stejně jako bod 2, stačí pouze místo prázdné množiny uvažovat Ω, o které víme, že je stejně jako prázdná množina prvkem $\mathcal{A}$. Postup je zcela totožný.

□

Definice 1.8 (Pravděpodobnost)**.** *Buď Ω neprázdná množina a $\mathcal{A} \subset \Omega$ nechť je σ-algebra. Potom pravděpodobnost P je libovolná funkce $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, která splňuje následující podmínky:*

1. $(\forall A \in \mathcal{A})\,(\mathrm{P}(A) \geq 0)$ *(nezápornost)*
2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ *(normovanost)*
3. *Buď $(A_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ systém navzájem neslučitelných jevů, potom nechť*

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k) \quad \textit{(tzv. } \sigma\textit{-aditivita)}$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je pravděpodobnostní prostor.

Poznámka 1.9. *Po definici σ-algebry se mohlo zdát, že nejlepší bude prostě vzít $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, tj. potenční množinu. To vskutku jde, pokud je Ω spočetná. Pokud je však množina Ω nespočetná, je sice 2^{Ω} σ-algebra, nicméně neumíme definovat funkci P tak, aby vyhovovala axiomům. Jak je potom $\mathcal{A}$ volena, je blíže rozebíráno v kapitole 1.4.*

Věta 1.10. *Buď $\mathcal{A}$ σ-algebra, $A, B, C \in \mathcal{A}$, potom platí:*

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)$ *$(A_1, \ldots, A_n$ disjunktní jevy)*
3. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
4. $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$
5. $\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N,\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{N,\infty} \mathrm{P}(A_k)$ *(Booleova nerovnost)*

6. $(A \subset B) \Rightarrow (\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B))$ *(monotonie pravděpodobnosti)*

7. $(\forall A \in \mathcal{A})(\mathrm{P}(A) \leq 1)$

8. $(\forall A \in \mathcal{A})\left(\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^{\mathbb{C}})\right)$

Důkaz. 1. Buď $(\forall k \in \mathbb{N})(A_k = \emptyset)$. Potom

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathrm{P}\left(\emptyset\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\emptyset\right) \Rightarrow \mathrm{P}(\emptyset) = 0$$

2. Nechť $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$. Využijeme aditivity P:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{n+1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{P}\left(\sum_{n+1}^{\infty} A_k\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) + \underbrace{\sum_{n+1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k)}_{0} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)$$

čili

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)$$

3. Využijeme vztahů $A \cup B = A + B \cap A^{\mathbb{C}}$, $B = (B \cap A) + (B \cap A^{\mathbb{C}})$:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^{\mathbb{C}} \cap B)$$

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A) + \mathrm{P}(A^{\mathbb{C}} \cap B) \Rightarrow \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(A^{\mathbb{C}} \cap B)$$

a tedy

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

4. Stačí dvakrát aplikovat předchozí postup. Detailní provedení necháváme na čtenáři...

5. Důkaz provedeme matematickou indukcí:

$n = 2$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

$n \to n + 1$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathrm{P}\left(A_{n+1}\right) - \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right) \leq$$

$$\overset{ind}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_k)$$

6. Nechť $A \subset B$. Potom

$$B = (A \cap B) + (A^{\mathbb{C}} \cap B) \text{ přechází v } B = A + (A^{\mathbb{C}} \cap B)$$

čili

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \underbrace{\mathrm{P}(B \cap A^{\mathbb{C}})}_{\geq 0}$$

a tedy $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

7. Vyplývá primitivně z monotonie pravděpodobnosti. Nechť existuje $A \subset \Omega$ taková, že $\mathrm{P}(A) > 1$. Potom ale dle předchozího tvrzení $A \subset \Omega \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(\Omega) = 1$, což je spor.

8. Tvrzení vyplývá z rovnosti $A + A^{\mathbb{C}} = \Omega$. Potom totiž

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1 = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^{\mathbb{C}}) \Rightarrow 1 - \mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}) = \mathrm{P}(A)$$

□

Věta 1.11 (Věta o spojitosti pravděpodobnosti)**.** *Buď $(A_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ systém podmnožin σ-algebry $\mathcal{A}$ a nechť platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. *$A_k \nearrow A$, tj. systém roste ve smyslu inkluze ($A_k \subset A_{k+1}$, $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = A$).*
2. *$A_k \searrow A$, tj. systém klesá ve smyslu inkluze ($A_{k+1} \subset A_k$, $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = A$).*

Potom platí

$$\mathrm{P}(A_k) \to \mathrm{P}(A)$$

Důkaz.

1. (a) Nechť nejdříve $A_k \searrow A = \emptyset$. Definujme systém B_k takto:

$$B_k = A_k - A_{k+1}$$

Potom B_k jsou disjunktní (neslučitelné jevy), a můžeme tedy psát

$$A_n = \bigcup_{k \geq n} B_k = \sum_{k \geq n} B_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(B_k) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mathrm{P}(A_1) \in [0, 1]$$

(konverguje $\Rightarrow$ řada zbytků jde k 0)

$$\mathrm{P}(A_n) = \sum_{k \geq n} \mathrm{P}(B_k) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 = \mathrm{P}(\emptyset)$$

(b) Nechť nyní $A_k \searrow A \neq \emptyset$. Tento případ převedeme na předchozí, protože platí:

$$A_n = (A_n - A) + A \Rightarrow \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A_n - A) + \mathrm{P}(A)$$

Systém $A_n - A$ klesá ve smyslu inkluze, a přitom $A_n - A \to \emptyset$, čímž jsme převod na předchozí případ dokončili, a platí tedy

$$\mathrm{P}(A_n - A) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \mathrm{P}(A_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(A)$$

2. Případy $A_k \nearrow A$ lze převést na předchozí případy. Použijeme posloupnost $A_k^{\mathbb{C}}$. Pomocí de Morganových pravidel lze ukázat, že klesá k $A^{\mathbb{C}}$. Tím jsou splněny předpoklady předešlého případu a tedy $\mathrm{P}(A_k^{\mathbb{C}}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(A^{\mathbb{C}})$. Celkem

$$\mathrm{P}(A_k) = 1 - \mathrm{P}(A_k^{\mathbb{C}}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{P}(A^{\mathbb{C}}) = \mathrm{P}(A)$$

□

1.3 Podmíněná pravděpodobnost

Definice 1.12 (Podmíněná pravděpodobnost)**.** *Buďte A, B jevy a nechť $\mathrm{P}(B) > 0$. Potom podmíněnou pravděpodobnost jevu A za předpokladu (jevu) B (tzv. apriorní informace) definujeme jako*

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \tag{1}$$

Věta 1.13. $\mathrm{P}(\cdot|B)$ *je pravděpodobnost ve smyslu definice 1.8.*

Důkaz. 1.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \geq 0$$

2.

$$\mathrm{P}(\Omega|B) = \frac{\mathrm{P}(\Omega \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$$

3.

$$\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \middle| B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap B\right)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B)\right)}{\mathrm{P}(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(A_j \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

□

Věta 1.14 (Součinové pravidlo)**.** *Buďte $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ jevy takové, že $\mathrm{P}(A_0 \ldots A_{n-1}) > 0$. Potom*

$$\mathrm{P}(A_0 A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_0) \cdot \mathrm{P}(A_1|A_0) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_0 A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_0 \cdots A_{n-1}) \tag{2}$$

Důkaz. Nejdříve musíme ověřit, zda jsou jednotlivé činitele v součinu vůbec definovány, tj. jestli náhodou někde nedělíme nulou. To ale díky předpokladu $\mathrm{P}(A_0 A_1 \ldots A_n) > 0$ a díky monotonii pravděpodobnosti nastat nemůže. Nyní tedy stačí dokázat rovnost, což provedeme indukcí:

$n = 1$

$$\mathrm{P}(A_0 A_1) = \mathrm{P}(A_0) \cdot \mathrm{P}(A_1|A_0)$$

$n \to n+1$

$$\mathrm{P}(A_0 \cdots A_{n+1}) = \mathrm{P}(A_0 \cdots A_n) \cdot \mathrm{P}(A_{n+1}|A_0 \cdots A_n)$$

přičemž dle předpokladu

$$\mathrm{P}(A_0 A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_0) \cdot \mathrm{P}(A_1|A_0) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_0 A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_0 \cdots A_{n-1})$$

a celé tvrzení tedy platí.

□

Definice 1.15 (Úplný rozklad jevu)**.** *Systém $(H_n)_{n=1}^{N,\infty}$ nazýváme úplným rozkladem jistého jevu Ω, pokud*

1. *H_k jsou disjunktní (neslučitelné jevy)*
2. *$\sum_{k=1}^{N,\infty} \mathrm{P}(H_k) = 1$*
3. *$(\forall k)(\mathrm{P}(H_k) > 0)$*

Poznámka 1.16. *Nemusí nutně být $\Omega = \sum_k H_k$. Můžeme vynechat množiny, jejichž pravděpodobnost je nulová.*

Věta 1.17 (O úplnosti)**.** *Buď $(H_n)_{n=1}^{N,\infty}$ úplným rozkladem jevu $\Omega, A \in \mathcal{A}$. Potom platí*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_n \mathrm{P}(A|H_n) \cdot \mathrm{P}(H_n) \tag{3}$$

Důkaz.

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(A \cap \sum_{k=1}^{N,\infty} H_k\right) + \mathrm{P}\left(A \cap \left(\sum_{k=1}^{N,\infty} H_k\right)^{\mathbb{C}}\right)$$

Přitom ale platí

$$\mathrm{P}\left(A \cap \left(\sum_{k=1}^{N,\infty} H_k\right)^{\mathbb{C}}\right) \leq \mathrm{P}\left(\left(\sum_{k=1}^{N,\infty} H_k\right)^{\mathbb{C}}\right) = 0$$

takže

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(A \cap \sum_{k=1}^{N,\infty} H_k\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{N,\infty} (H_k \cap A)\right) = \sum_{k=1}^{N,\infty} \mathrm{P}(H_k \cap A) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N,\infty} \frac{\mathrm{P}(H_k \cap A)}{\mathrm{P}(H_k)} \mathrm{P}(H_k) = \sum_{k=1}^{N,\infty} \mathrm{P}(A|H_k) \cdot \mathrm{P}(H_k)$$

□

Věta 1.18 (Věta Bayesova)**.** *Buď $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ úplným rozkladem jevu $\Omega, A \in \mathcal{A}$ tak, že $\mathrm{P}(A) > 0$. Potom platí:*

$$\mathrm{P}(H_j|A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_j) \cdot \mathrm{P}(H_j)}{\sum_{k=1}^{N,\infty} \mathrm{P}(A|H_k) \cdot \mathrm{P}(H_k)} \tag{4}$$

Důkaz.

$$\mathrm{P}(H_j|A) = \frac{\mathrm{P}(H_j \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A|H_j) \cdot \mathrm{P}(H_j)}{\sum_{k=1}^{N,\infty} \mathrm{P}(A|H_k) \cdot \mathrm{P}(H_k)}$$

□

Příklad 1.19 (Polyaův zásobníkový model)**.** *Uvažujme zásobník, ve kterém máme r červených a s bílých kuliček. Provedeme náhodný tah, kuličku do zásobníku vrátíme a přidáme c kuliček stejné barvy. Určete pravděpodobnost jevu A, že v prvních třech tazích vytáhneme červené kuličky.*

Definujme jevy A_1, A_2, A_3 tak, že jev A_i znamená tah červené kuličky v i-tém tahu. Hledáme tedy pravděpodobnost jevu $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Podle součinového pravidla tedy platí

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3|A_1 \cdot A_2)$$

Přitom triviálně platí

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{r}{r+s}$$

$$\mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{r+c}{r+s+c}$$

$$\mathrm{P}(A_3|A_1 \cdot A_2) = \frac{r+2c}{r+s+2c}$$

a celkem tedy

$$\mathrm{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{r(r+c)(r+2c)}{(r+s)(r+s+c)(r+s+2c)}$$

Příklad 1.20. *Nechť je vypsáno n zkouškových termínů, na které jsou dva zkoušející X a Y. Je známo že n_1 termínů zkouší X a $n - n_1 = n_2$ zkouší Y. Je také známo, že X má r_1 dobrých a s_1 špatných otázek, zatímco Y má dobrých r_2 a s_2 špatných. Losujeme termíny (tj. zkoušející) a následně i otázky. Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme dobrou otázku?*

Jako jev A označme vytažení dobré otázky. Využijeme větu o úplnosti, přičemž za úplný rozklad jevu A zvolíme systém $\{H_1, H_2\}$, kde H_1 značí jev vytažení zkoušejícího X a H_2 značí vytažení zkoušejícího Y. Potom ale triviálně

$$\mathrm{P}(A|H_i) = \frac{r_i}{r_i + s_i}$$

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{n_i}{n}$$

a dle věty o úplnosti tedy

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{P}(A|H_i) \cdot \mathrm{P}(H_i) = \frac{r_1 n_1}{(r_1+s_1)n} + \frac{r_2 n_2}{(r_2+s_2)n}$$

Příklad 1.21 (Politická úloha)**.** *Máme tři politické strany - ODS, ČSSD a JM (Jihočeské Matky), přičemž tyto tři strany si místa na úřadě rozdělily tak, že ODS má n_1 zástupců, ČSSD má n_2 zástupců a JM mají n_3 zástupkyň. Přitom víme, že v ODS je r_1 dobrých a b_1 špatných politiků, v ČSSD je dobrých politiků r_2 a špatných b_2 a v JM je dobrých političek r_3 a špatných b_3. Jaká je pravděpodobnost, že pokud zvolíme dobrého politika/političku, bude z ČSSD/ODS/JM? (Odpověď "malá"není dostačující.)*

Uvažujme úplný rozklad jistého jevu takto: H_1 byl zvolen z ODS, H_2 byl zvolen z ČSSD, H_3 byla zvolena z JM. Jev $A \in \mathcal{A}$ je volba dobrého politika. Hledáme tedy $\mathrm{P}(H_2|A)$, přičemž všechny podmíněné pravděpodobnosti $\mathrm{P}(A|H_i)$ známe. Využijeme tedy větu Bayesovu a vyjde nám

$$\mathrm{P}(H_2, A) = \frac{\mathrm{P}(A|H_2) \cdot \mathrm{P}(H_2)}{\sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(A|H_k) \cdot \mathrm{P}(H_k)} = \frac{\frac{r_2}{r_2+b_2} \cdot \frac{n_2}{n_1+n_2+n_3}}{\frac{r_1}{r_1+b_1} \cdot \frac{n_1}{n} + \frac{r_2}{r_2+b_2} \cdot \frac{n_2}{n} + \frac{r_3}{r_3+b_3} \cdot \frac{n_3}{n}}$$

Definice 1.22 (Nezávislost jevů)**.** *Buď $\mathcal{C}$ libovolný systém jevů z $\mathcal{A}$. Potom říkáme že systém jevů $\mathcal{C}$ je stochasticky nezávislý (jevy v $\mathcal{C}$ jsou nezávislé), pokud pro pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každou n-tici jevů z $\mathcal{C}$ platí*

$$\mathrm{P}(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) \tag{5}$$

Věta 1.23. *Buďte $A, B \in \mathcal{A}$ jevy, potom platí:*

1. *Pokud jsou jevy A, B nezávislé, potom jsou nezávislé i jevy $A, B^{\mathbb{C}}$.*
2. *Buďte A, B takové, že $\mathrm{P}(B) = 0$. Potom jsou jevy A, B nezávislé.*
3. *Buďte A, B takové, že $\mathrm{P}(B) = 1$. Potom jsou jevy A, B nezávislé.*
4. *Buďte A, B neslučitelné. Potom jsou nezávislé právě když $\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0$.*
5. *Buď $\mathrm{P}(B) > 0$. Potom jsou A, B nezávislé právě když $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.*
6. *Buďte A, B nezávislé, a nechť $1 > \mathrm{P}(B) > 0$. Potom $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^{\mathbb{C}})$.*

Důkaz.

1. $\mathrm{P}(A \cdot B^{\mathbb{C}}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B^{\mathbb{C}})$ kde jsme využili vztahů

$$A = AB + AB^{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(AB^{\mathbb{C}})$$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

2. Zřejmé, protože

$$\mathrm{P}(AB) \leq \mathrm{P}(B) = 0 \Rightarrow \mathrm{P}(AB) = 0$$

3. Zřejmé, protože můžeme použít (1) a (2) na jevy $A, B^{\mathbb{C}}$.

4. $\Rightarrow$ Buďte A, B neslučitelné a nezávislé, tj. $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$ a $\mathrm{P}(A \cdot B) = 0$. Potom ale zřejmě $\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0$.

   $\Leftarrow$ Nechť jsou A, B neslučitelné a nechť $\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0$. Přitom ale $\mathrm{P}(AB) = 0$, takže rovnost platí.

5. $\Rightarrow$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cdot B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)$$

   $\Leftarrow$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

6. Stačí využít bodů (1) a (5) z této věty.

□

Poznámka 1.24.

1. *Vlastnosti neslučitelnost a nezávislost nejsou totožné. Zároveň ani jedna vlastnost neimplikuje druhou.*

2. *Nezávislost nestačí definovat „po dvou," podmínka „pro všechny n-tice" v definici je velice důležitá. Tato vlastnost je demonstrována v následujícím příkladě.*

Definice 1.25 (Po dvou nezávislé jevy)**.** *Systém jevů $\mathcal{C}$ je po dvou nezávislý systém jevů, pokud $\forall A, B \in \mathcal{C}$ platí $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.*

Poznámka 1.26. *Předchozí definice není ekvivalentní s definicí stochastické nezávislosti.*

Příklad 1.27. *Mějme prostor elementárních jevů o čtyřech (stejně pravděpodobných) prvcích, tj. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, a tři jevy $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}, A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}, A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$. Tyto jevy jsou po dvou nezávislé, ale definici stochastické nezávislosti nevyhovují. Platí sice*

$$\mathrm{P}(A_1A_2) = \mathrm{P}(A_1A_3) = \mathrm{P}(A_2A_3) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_3) = \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{4}$$

Ale

$$\mathrm{P}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{8}$$

Příklad 1.28 (Pro karbaníky)**.** *Uvažujme balíček 52 karet (čtyři barvy po třinácti kartách). Označme jako jev A vytažení srdcové karty a jako jev B označme vytažení dámy. Potom*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{13}{52}, \mathrm{P}(B) = \frac{4}{52} \Rightarrow \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{52}$$

Pravděpodobnost tažení srdcové dámy je

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \frac{1}{52}$$

To znamená, že jevy A a B jsou nezávislé. Přidejme do karet jednoho žolíka. Potom ale

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \frac{1}{53}$$

$$\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{13}{53} \cdot \frac{4}{53} \neq \frac{1}{53}$$

Poučení z tohoto příkladu tedy zní - nepůjčujte balíček blbečkovi, který vám tam nastrká další karty.

1.4 Náhodné veličiny a úvod do teorie míry

V následujícím textu nechť $\Omega \neq \emptyset$ označuje libovolnou množinu. Následující úvahy nejsou čistě „pravděpodobnostní“, ale zasahují do mnoha oblastí matematiky.

Definice 1.29 (Minimální σ-algebra)**.** *Buď $\mathcal{Z} \subset 2^\Omega$ libovolný systém podmnožin množiny Ω. Buďte $\mathcal{S}_\alpha$ libovolné σ-algebry takové, že $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S}_\alpha$. Minimální σ-algebru nad systémem $\mathcal{Z}$ definujeme takto*

$$\sigma(\mathcal{Z}) = \bigcap_\alpha \mathcal{S}_\alpha$$

Definice 1.30 (Borelovská σ-algebra)**.** *Buď $\Omega = \mathbb{R}^n$ a systém $\mathcal{Z}_n$ volme jako otevřené intervaly, tj. $\mathcal{Z}_n = \{\times_{k=1}^n (a_k, b_k) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k \leq b_k\}$. Potom minimální σ-algebru $\sigma(\mathcal{Z}_n)$ nazýváme Borelovskou σ-algebrou a značíme $\mathcal{B}_n$. Speciálně pro $n = 1$ značíme $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$. Množinám z Borelovské σ-algebry říkáme borelovské množiny.*

Systém můžeme volit mnoha různými způsoby, pro nás však bude hlavní, zda generuje Borelovskou σ-algebru. Z jistého pohledu pro nás budou všechny systémy generující Borelovskou σ-algebru ekvivalentní.

Definice 1.31 (Měřitelný prostor, měřitelná množina)**.** *Buď Ω libovolná neprázdná množina a $\mathcal{A}$ nechť je libovolná σ-algebra definovaná na Ω. Potom uspořádanou dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme měřitelným prostorem. Množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme $\mathcal{A}$-měřitelné. (Pokud je $\mathcal{A}$ borelovská σ-algebra, potom říkáme, že A je borelovsky měřitelná.)*

Definice 1.32 (Prostor s mírou[1])**.** *Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a nechť $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ je σ-aditivní. Potom μ nazýváme mírou na prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ a uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme s prostorem s mírou μ.*

Poznámka 1.33. *Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je tedy měřitelný prostor s mírou P.*

Definice 1.34 (Měřitelná funkce)**.** *Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a nechť $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Říkáme, že f je $\mathcal{A}$-měřitelná právě tehdy, když*

$$(\forall B \in \mathcal{B}_n) \left(f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right) \tag{6}$$

tj. pokud vzory borelovských množin jsou měřitelné. Speciálně pokud je $\mathcal{A}$ borelovská σ-algebra, říkáme, že f je borelovsky měřitelná.

Definice 1.35 (Náhodná veličina)**.** *Uvažujme měřitelný prostor s mírou $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Říkáme, že funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina, pokud*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\right) \tag{7}$$

Poznámka 1.36. *Buď $X : \Omega \to \mathcal{R}$.*

1. *Je zřejmé, že pokud je funkce X (borelovsky) měřitelná, je náhodnou veličinou. V následujících úvahách se budeme zabývat i otázkou, zda je borelovská měřitelnost podmínkou nutnou, tj. zda je X náhodnou veličinou, právě když je borelovsky měřitelná.*

[1] Míra není Mirek!

2. Budeme značit

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}$$

$$\mathrm{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid X\left(\omega\right) \leq x\}\right) = \mathrm{P}\left(X \leq x\right)$$

a obdobně pro další nerovnosti.

Příklad 1.37. *Házejme dvěma kostkami současně. Prostorem elementárních jevů Ω je tedy množina všech uspořádaných dvojic $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),\ldots,(6,6)\}$. Jako σ-algebru můžeme volit $2^{\Omega} = \mathcal{A}$. Tím jsme sestrojili měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, na kterém můžeme definovat například funkci $X(\omega) = X(i,j) = i + j$. Je funkce X náhodnou veličinou?*

Můžeme postupovat konstruktivně:

$$\{X \leq 1\} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$\{X \leq 2\} = \{(1,1)\} \in \mathcal{A}$$

$$\{X \leq 3\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \in \mathcal{A}$$

$$\vdots$$

$$\{X \leq 12\} = \Omega \in \mathcal{A}$$

V podstatě od začátku je však zřejmé, že z $\mathcal{A}$ nemůžeme „vypadnout“, protože jsme $\mathcal{A}$ zvolili jako potenční množinu. X je tedy náhodná veličina.

Příklad 1.38 (Indikátor jevu A)**.** *Indikátorem jevu $A \in \Omega$ nazýváme funkci $\mathbf{1}_A$ definovanou jako*

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Indikátor jevu A je náhodná veličina, protože

$$\{\mathbf{1}_A \leq b\} = \begin{cases} \emptyset & b < 0 \\ A^{\mathbb{C}} & 0 \leq b < 1 \\ A & b \geq 1 \end{cases}$$

Definice 1.39 (Náhodná veličina II)**.** *Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Potom říkáme, že X je náhodná veličina, právě tehdy když je měřitelná, tj.*

$$(\forall B \in \mathcal{B})\left(X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right)$$

(Pokud je $\mathcal{A}$ borelovská σ-algebra, potom je X náhodná veličina právě tehdy, když je borelovsky měřitelná.)

Nyní vyvstává již zmíněná otázka: Jsou obě definice ekvivalentní? Není například jedna z definic restriktivnější? Je zcela zřejmé, že pokud je X (borelovsky) měřitelná, potom je to náhodná veličina, otázkou tedy zůstává opačná implikace, tj. implikace

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\{X \leq x\} \in \mathcal{A}\right) \Rightarrow (\forall B \in \mathcal{B})\left(X^{-1}\left(B\right) \in \mathcal{A}\right) \tag{8}$$

Na tuto otázku nám odpoví následující lemma a věta, která na něj bezprostředně navazuje.

Lemma 1.40. *Buďte $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ měřitelné prostory. Buď $X : \Omega \to \mathbb{R}$ a nechť $\emptyset \neq \tau \subset 2^{\mathbb{R}}$ je takový systém podmnožin, že $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$. Potom $X^{-1}(\tau) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}$, tj.*

$$\left(X^{-1}(A) \in \mathcal{A}\right)(\forall A \in \tau) \Leftrightarrow \left(X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right)(\forall B \in \mathcal{B}) \tag{9}$$

Důkaz.

$\Leftarrow$ Množiny z τ jsou (dle definice minimální σ-algebry) i prvky $\sigma(\tau)$, takže pokud tvrzení

$$\left(X^{-1}(A) \in \mathcal{A}\right)(\forall A \in \mathcal{B})$$

platí pro množiny $A \in \mathcal{B} = \sigma(\tau)$, nutně platí i pro množiny z τ.

$\Rightarrow$ Důkaz opačné implikace bude složitější. Definujme systém

$$\tau' = \left\{B \subset \mathbb{R} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$

Potom ale nutně $\tau \subset \tau'$. Tvoří τ' σ-algebru?

1. Buď $A \in \tau'$, potom tedy $A^{\mathbb{C}} \in \tau'$, protože
$$X^{-1}\left(A^{\mathbb{C}}\right) = \underbrace{\left(X^{-1}(A)\right)}_{\in \mathcal{A}}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{A}$$
2. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in \tau'$, potom $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \tau'$, protože
$$X^{-1}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \cup_{j=1}^{\infty} \underbrace{X^{-1}(A_j)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$
3. Vlastnost $\emptyset \in \tau'$ vyplývá přímo z vlastností (1) a (2), protože $\tau' \neq \emptyset$.

Víme tedy, že τ' je σ-algebra, která má navíc tu vlastnost že $\tau \subset \tau'$. To ale znamená, že

$$\sigma(\tau) = \cap_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha} \subset \tau'$$

přičež ale $\mathcal{S}_{\alpha}$ byly voleny právě tak, aby

$$\tau \subset \mathcal{S}_{\alpha}$$

Podle předpokladů ale navíc platí $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$.

□

Poznámka 1.41. *Co lemma vlastně říká - pokud vezmu systém množin τ, který generuje borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}$, potom je tento systém s touto σ-algebrou v jistém smyslu ekvivalentní. Ekvivalence spočívá právě v tom, že nemusím zkoumat měřitelnost všech $B \in \mathcal{B}$, ale stačí mi vzít tento systém τ a ověřit měřitelnost „pouze“ pro množiny z tohoto systému. To je mnohdy podstatně jednodušší. Následující věta uvádí několik příkladů, jak lze takový systém τ volit.*

Věta 1.42. *Buď $X : \Omega \to \mathcal{R}$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *X je náhodná veličina (dle druhé definice)*
2. $(\forall b \in \mathcal{R})\left(\{X \leq b\} = X^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{A}\right)$
3. $(\forall b \in \mathcal{R})\left(\{X < b\} = X^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{A}\right)$
4. $(\forall b \in \mathcal{R})\left(\{X \geq b\} = X^{-1}([b, +\infty)) \in \mathcal{A}\right)$
5. $(\forall b \in \mathcal{R})\left(\{X > b\} = X^{-1}((b, +\infty)) \in \mathcal{A}\right)$
6. $(\forall a, b \in \mathcal{R})\left(\{a < X \leq b\} = X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{A}\right)$
7. $(\forall a, b \in \mathcal{R})\left(\{a < X < b\} = X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}\right)$
8. $(\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{R},\ \mathcal{U}$ *otevřená* $)\left(\{X \in \mathcal{U}\} = X^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}\right)$

Důkaz. Nejdříve si uvědomme, že v každém z bodů (2) až (8) tvrzení vystupuje jistý systém množin a o těchto systémech vlastně tvrdíme, že generují borelovskou σ-algebru, tj. že $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$. Systémy seřadíme a označíme podle toho, ve kterém tvrzení se vyskytují, takže

$$\tau_2 = \{(-\infty, b] \mid b \in \mathcal{R}\}$$
$$\tau_3 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathcal{R}\}$$
$$\tau_4 = \{[b, +\infty) \mid b \in \mathcal{R}\}$$
$$\tau_5 = \{(b, +\infty) \mid b \in \mathcal{R}\}$$
$$\tau_6 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathcal{R}\}$$
$$\tau_7 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathcal{R}\}$$
$$\tau_8 = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{R},\ \mathcal{U} \text{ otevřená}\}$$

Nyní si uvědomme, že přímo z definice 1.39 plyne ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (7), protože právě systém τ_7 byl použit za základ definice Borelovské σ-algebry $\mathcal{B}$. Tohoto faktu budeme v důkazu často využívat. Dokažme nejdříve implikaci (7) $\Leftrightarrow$ (8), tj. s využitím faktu uvedeného výše chceme ukázat, že

$$\sigma(\tau_8) = \mathcal{B} = \sigma(\tau_7)$$

$\sigma(\tau_8) \subset \sigma(\tau_7)$ Buď $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ libovolná otevřená. Potom ale nutně $\mathcal{U} = \cup_{i=1}^{N,\infty}(a_i, b_i)$ (sjednocení nejvýše spočetného počtu intervalů), takže nutně $\mathcal{U} \in \sigma(\tau_7)$, a tedy také $\sigma(\tau_8) \subset \sigma(\tau_7)$.

$\sigma(\tau_7) \subset \sigma(\tau_8)$ Tato inkluze je ale primitivní, protože z toho že $\mathcal{U} \in \sigma(\tau_7)$ primitivně vyplývá, že $\mathcal{U} \in \sigma(\tau_8)$

Tím jsme tedy dokázali, že systém τ_7 má vlastnost $\sigma(\tau_7) = \mathcal{B} = \sigma(\tau_8)$. Nyní dokažme ekvivalenci (1) $\Leftrightarrow$ (5). Stejně jako v předchozím případě chceme ukázat, že $\sigma(\tau_5) = \mathcal{B}$. Vezměme si intervaly typu $(a, b + n)$ kde $n \in \mathbb{N}$. Tyto intervaly jsou jistě z $\mathcal{B}$, a tedy i jejich spočetné sjednocení

$$(a, +\infty) = \cup_{n=1}^{\infty}(a, b + n)$$

je také z $\mathcal{B}$, a to díky vlastnostem $\mathcal{B}$ jako σ-algebry. Takže $\sigma(\tau_5) \subset \mathcal{B}$. Buď nyní $(a, b) \in \mathcal{B}$, a vyjádřeme ho jako

$$(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a, b_n], \text{ kde } b_n \nearrow b$$

Potom tedy

$$(a,b) = \cup_{n=1}^{\infty}(\underbrace{(a,+\infty)}_{\in\tau_5} \cap \underbrace{(b_n,+\infty)^{\mathbb{C}}}_{\in\tau_5}) \Rightarrow (a,b) \in \sigma(\tau_5)$$

Nutně tedy musí platit $\mathcal{B} \subset \sigma(\tau_5)$.

Dokažme nyní ještě ekvivalenci (1) $\Leftrightarrow$ (2). Půjdeme na to fintou - dokážeme to přes (5). Uvědomme si totiž, že

$$(\forall b \in \mathcal{B})\left((-\infty,b] = (b,+\infty)^{\mathbb{C}}\right)$$

a tudíž primitivně platí $\sigma(\tau_5) = \sigma(\tau_2)$.

Ostatní ekvivalence se dokazují až na drobné změny stejně, jako bylo právě naznačeno. □

Věta 1.43. *Mějme $(\Omega,\mathcal{A})$ měřitelný prostor. Nechť $\mathbf{X} = (x_1,x_2,\ldots,x_n) : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n)$ je náhodná veličina a $g : (\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$ borelovsky měřitelná. Pak $g(\mathbf{X})$ je náhodná veličina.*

Důkaz. Nechť $B \in \mathcal{B}$. Chceme ukázat, že $(g(\mathbf{X}))^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$$(g \circ \mathbf{X})^{-1}(B) = \mathbf{X}^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$$

□

Věta 1.44. *Nechť $g : (\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n) \to (\mathbb{R}^1,\mathcal{B}_1)$ spojitá, pak je g borelovsky měřitelná.*

Důkaz. Chceme ukázat, že $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}_n, \forall B \in \mathcal{B}_1$. Stačí se omezit na $\tau = \{B | B$ je otevřená; $B \subset \mathbb{R}^1\}, \sigma(\tau) = \mathcal{B}_1$. g je spojitá, pak pro libovolnou B otevřenou je $g^{-1}(B)$ otevřená a $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}_n$. Tudíž je g borelovsky měřitelná. □

Věta 1.45. *Buďte X,Y náhodné veličiny na měřitelném prostoru $(\Omega,\mathcal{A})$. Potom platí*

1. *$K \cdot X$ je náhodná veličina (K je konstanta)*
2. *$X + Y$ je náhodná veličina*
3. *X^2 je náhodná veličina*
4. *$X \cdot Y$ je náhodná veličina*
5. *X/Y je náhodná veličina (pokud $\{\omega \mid Y(\omega) = 0\} = \emptyset$)*
6. *$\max\{X,Y\}$ a $\min\{X,Y\}$ jsou náhodné veličiny*
7. *$\sup_{i\in\mathbb{N}}\{X_i\}$ a $\inf_{i\in\mathbb{N}}\{X_i\}$ (kde X_i jsou náhodné veličiny) jsou náhodné veličiny (ale pouze spočetný typ infima a suprema!)*
8. *$X = \lim_{n\to\infty} X_n$ je náhodná veličina*

Důkaz. V souladu s větou 1.42 nám stačí dokázat, že jsou uvedené množiny borelovsky měřitelné.

1. Buď X náhodná veličina, potom KX je náhodná veličina, právě když $\{KX \leq b\} \in \mathcal{A}$, tj. pokud
$$\begin{array}{cc} K > 0 & \left\{X \leq \frac{b}{K}\right\} \in \mathcal{A} \\ K < 0 & \left\{X \geq \frac{b}{K}\right\} \in \mathcal{A} \\ K = 0, b \geq 0 & \{0 \leq b\} = \Omega \\ K = 0, b < 0 & \{0 \geq b\} = \emptyset \end{array}$$
Přitom ale první dvě tvrzení platí díky předchozí větě a druhá dvě tvrzení vyplývají přímo z vlastnosti σ-algebry. Tím je celé toto tvrzení dokázáno.

2. $X+Y$ je náhodná veličina, pokud $A = \{\omega \mid X(\omega)+Y(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$ pro každé $b \in \mathcal{R}$. Tvrdíme, že
$$A = \cup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\{X \leq r\} \cap \{Y \leq b - r\}\right)$$
a celé tvrzení dokážeme pro takto definovanou množinu A. Platí ale uvedená rovnost? Zcela jistě platí inkluze $\cup_{r\in\mathbb{Q}} (\ldots) \subset A$, ale co opačná inkluze? Nechť tedy $\omega \in A$, potom $X+Y < b$, a tedy $X < b - Y$. Existuje tedy $r \in \mathbb{Q}$ takové, že
$$X \leq r \leq b - Y$$
a tedy $X \leq r$ a $Y \leq b-r$, takže $\omega \in \cup_{r\in\mathbb{Q}} (\ldots)$. Nyní se ještě podívejme na to, zda $A \in \mathcal{A}$ pro každé b. To je však zřejmé z vlastnosti σ-algebry (konkrétně uzavřenosti vzhledem k nejvýše spočetným průnikům a sjednocením), protože
$$A = \cup_{r\in\mathbb{Q}} (\underbrace{\{X \leq r\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y \leq b - r\}}_{\in\mathcal{A}})$$
takže tvrzení zřejmě platí.

3. Buď X náhodná veličina. Potom X^2 je náhodná veličina, právě když pro každé $b \in \mathcal{R}$ platí
$$\{X^2 \leq b\} \in \mathcal{A}$$
Přitom ale
$$X^2 = \begin{cases} \emptyset & c < 0 \\ \{-\sqrt{c} \leq X \leq \sqrt{c}\} & c \geq 0 \end{cases}$$
Zřejmě však $\emptyset \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ je σ-algebra) a také $\{-\sqrt{c} \leq X \leq \sqrt{c}\} \in \mathcal{A}$, a to díky větě 1.40. ($X$ je náhodná veličina).

4. Triviálně platí, že
$$XY = \frac{1}{4}\left[(X+Y)^2 - (X-Y)^2\right]$$
Díky předchozím třem tvrzením je tedy zřejmě XY náhodná veličina.

5. Buďte X, Y náhodné veličiny, $\{Y = 0\} = \emptyset$. Potom
$$\left\{\frac{X}{Y} \leq b\right\} = \left\{\frac{X}{Y} \leq b\right\} \cap \{Y < 0\} + \left\{\frac{X}{Y} \leq b\right\} \cap \{Y > 0\} =$$
$$= \underbrace{\{X - bY \leq 0\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y < 0\}}_{\in\mathcal{A}} + \underbrace{\{X - bY \geq 0\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y < 0\}}_{\in\mathcal{A}}$$

6. Maximum je náhodná veličina, protože

$$\{\max\{X,Y\} \le b\} = \underbrace{\{X \le b\}}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{\{Y \le b\}}_{\in\mathcal{A}}$$

   Minimum je náhodná veličina, protože

$$\{\min\{X,Y\} \le b\} = \underbrace{\{X \le b\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y \le b\}}_{\in\mathcal{A}}$$

7. Důkaz pro infimum a supremum je pouze modifikací inf a sup. Operace sjednocení a průnik totiž mohu provádět spočetně.

□

Příklad 1.46 (Identifikátor jevu)**.** *Buď A jev a $\mathbf{1}_A$ jeho identifikátor. Potom $\mathbf{1}_A$ má následující vlastnosti*

1. $(\mathbf{1}_A)^2 = \mathbf{1}_A$
2. $\mathbf{1}_{A^{\mathbb{C}}} = 1 - \mathbf{1}_A$
3. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$
4. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\}$
5. $\mathbf{1}_{A+B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$

Definice 1.47 (Rozdělení náhodné veličiny)**.** *Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ je náhodná veličina na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Pak pravděpodobnostní míru $\mathrm{P}^X := \mathrm{P} \circ X^{-1}$ nazýváme **rozdělením náhodné veličiny** X, nebo taky míra indukovaná X.*

Poznámka 1.48. *Ukážeme korektnost předešlé definice:*

$\mathrm{P}^X : \mathcal{B} \to [0,1]$

$\mathrm{P}^X(B) = (\mathrm{P} \circ X^{-1})(B) = \mathrm{P}(X^{-1}(B)) = \mathrm{P}(X \in B)$ *tj.* $P(\{\omega | X(\omega) \in B\})$

P^X *je pravděpodobnost:*

$\mathrm{P}^X \ge O$

$\mathrm{P}^X(\mathbb{R}^1) = \mathrm{P}(X^{-1}(\mathbb{R}^1)) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$

B_j *disjunktní:* $P^X\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mathrm{P}\left(X^{-1}\left(\sum_1^\infty B_j\right)\right) = \mathrm{P}\left(\sum_1^\infty X^{-1}(B_j)\right) =$
$= \sum_1^\infty \mathrm{P}(X^{-1}(B_j)) = \sum_1^\infty \mathrm{P}^X(B_j)$

Definice 1.49 (Distribuční funkce)**.** *Buď X náhodná veličina. Potom funkci $\mathrm{F}_X : \mathcal{R} \to [0,1]$, definovanou na $\mathcal{R}$ předpisem*

$$\mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(X \le x) = P^X|_{\tau=\{(-\infty,x]|x\in\mathbb{R}\}} \tag{10}$$

*nazýváme **distribuční funkcí** náhodné veličiny X.*

Příklad 1.50. *Házejme dvěma kostkami. Potom* $\Omega = \left\{(i,j) : i,j \in \hat{6}\right\}$. *Můžeme tedy zvolit* $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. *Uvažujme náhodnou veličinu* $X((i,j)) = i + j$. *Potom tedy* $\mathrm{P}((i,j)) = \frac{1}{36}$ *pro všechna* $i,j \in \hat{6}$, *a tedy* $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. *Definujme tedy* $\mathrm{P}(A) = \sum_{(i,j)\in A} \mathrm{P}(i,j)$. *Dle předchozí definice tedy* $\mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(\{X(i,j) \leq x\})$, *takže*

$$\begin{array}{cc} x < 2 & \mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0 \\ x \in [2,3) & \mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} \\ x \in [3,4) & \mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(\{(1,1),(1,2),(2,1)\}) = \frac{3}{36} \\ \vdots & \\ x \in [11,12) & \mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(\Omega \setminus \{(6,6)\}) = \frac{35}{36} \\ x \geq 12 & \mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(\Omega) = 1 \end{array}$$

Věta 1.51. *Buď* X *náhodná veličina a* F_X *její distribuční funkce. Potom*

1. F_X *je neklesající*
2. $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_X(x) = 1$
3. $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{F}_X(x) = 0$
4. F_X *je spojitá zprava*

Důkaz.

1. Buďte $x_1 \leq x_2$. Chceme dokázat, že potom $\mathrm{F}_X(x_1) \leq \mathrm{F}_X(x_2)$. Platí

   $$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$$

   a díky monotonii pravděpodobnosti platí $P(\{X \leq x_1\}) \leq P(\{X \leq x_2\})$, odkud již tvrzení primitivně plyne.

2. Platí

   $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_X(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}(X \leq x)$$

   Nyní si musíme uvědomit, že tato limita existuje (ze spojitosti pravděpodobnosti), takže dle věty Heineovy můžeme vzít libovolnou posloupnost x_n takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, a dostaneme stejnou limitu. Vezměme například $x_n = n$ (kvůli názornosti). Potom tedy platí

   $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}(X \leq x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X \leq n)$$

   Pokud si nyní označíme $A_n = \{X \leq n\}$, potom zřejmě platí $A_n \nearrow A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$, a dle věty o spojistosti pravděpodobnosti tedy platí

   $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X \leq n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

   Ale zřejmě $A = \Omega$, takže $\mathrm{P}(A) = 1$ a tvrzení platí.

3. Princip důkazu je zcela stejný jako v předchozím případě. Stačí pouze zvolit jako vybranou posloupnost $x_n = -n$, $A_n = \{X \leq -n\}$ a $A = \cap_{i=1}^{n} A_i$

4. Chceme vlastně dokázat, že $\lim_{x\to a+} \mathrm{F}_X(x) = \mathrm{F}_X(a)$. Platí

$$\lim_{x\to a+} \mathrm{F}_X(x) = |\text{Heine}| = \lim_{n\to\infty} \mathrm{F}_X\left(a + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(X \le a + \frac{1}{2^n}\right)$$

Množiny $A_n = \{X \le a + \frac{1}{2^n}\}$ zřejmě tvoří klesající systém, pro který $A_n \searrow A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = X^{-1}(-\infty, a]$, takže

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(X \le a + \frac{1}{2^n}\right) = \mathrm{P}(X \le a)$$

a to je dle definice $\mathrm{F}_X(a)$. Tím je tvrzení dokázáno.

□

Poznámka 1.52. *1. Distribuční funkce není spojitá zleva, protože například pro systém*

$$B_n = \left\{X \le a - \frac{1}{2^n}\right\}$$

tj. $B_n \nearrow B$*, platí*

$$B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n = (-\infty, a) \neq (-\infty, a]$$

2. Pokud bychom distribuční funkci definovali jako $\mathrm{F}_X(x) = \mathrm{P}(X < x)$*, potom by byla spojitá zleva. Platilo by totiž*

$$\mathrm{P}(X < a) = \mathrm{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty}\left\{X \le a - \frac{1}{2^n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(X \le x - \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{F}_X\left(a - \frac{1}{2^n}\right) = \mathrm{F}_X(a)$$

Tuto limitu budeme značit $\mathrm{F}_X(a-0)$*.*

Poznámka 1.53. *Pro* $a < b$ *platí*

1. $\mathrm{P}(a < X \le b) = \mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{F}_X(b) - \mathrm{F}_X(a)$
2. $\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(X < b) - \mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{F}_X(b-0) - \mathrm{F}_X(a)$
3. $\mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(X < b) - \mathrm{P}(X < a) = \mathrm{F}_X(b-0) - \mathrm{F}_X(a-0)$
4. $\mathrm{P}(X = a) = \mathrm{P}(X \le a) - \mathrm{P}(X < a) = \mathrm{F}_X(a) - \mathrm{F}_X(a-0)$

Definice 1.54 (Sdružená distribuční funkce)**.** *Buď* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *vektorová náhodná veličina na prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*,* $\mathrm{P}^{\mathbf{X}} = \mathrm{P} \circ \mathbf{X}^{-1}$ *rozdělení náhodné veličiny* $\mathbf{X}$*. Potom definujeme* ***sdruženou*** *(vícerozměrnou) distribuční funkci veličiny* $\mathbf{X}$ *předpisem*

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathrm{P}^{\mathbf{X}}|_{\tau_n = \{\times_{i=1}^n (-\infty, x_i],\, x_i \in \mathbb{R}\}} \text{ pro } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{11}$$

Poznámka 1.55. *Někdy také píšeme*

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(\mathbf{X} \subset \times_{i=1}^n (-\infty, x_i]) = \mathrm{P}(\cap_{i=1}^n \{X_i \in (-\infty, x_i]\}) = \mathrm{P}(\cap_{i=1}^n \{X_i \le x_i\})$$

Což označíme $\mathrm{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$ *a nazveme sdruženou pravděpodobností.*

Věta 1.56. *Buďte* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *náhodné veličiny a* $\mathrm{F}_{\mathbf{X}}$ *nechť je jejich sdružená distribuční funkce. Potom*

1. $\mathrm{F}_{\mathbf{X}}$ *je neklesající v každé proměnné, tj.*

$$(\forall i \in \widehat{n})\,(x_i \leq \tilde{x}_i)\,(\mathrm{F}_{\mathbf{X}}(x) \leq \mathrm{F}_{\mathbf{X}}(\tilde{x}))$$

2. *Pro každé* $k \in \widehat{n}$ *platí*

$$\lim_{x_k \to +\infty} \mathrm{F}_{\mathbf{X}}(x) = \mathrm{F}_{X_1,\ldots,X_{k-1},X_{k+1},\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

3. *Pro každé* $k \in \widehat{n}$ *platí*

$$\lim_{x_k \to -\infty} \mathrm{F}_{\mathbf{X}}(x) = 0$$

4. $\mathrm{F}_{\mathbf{X}}$ *je zprava spojitá v každé proměnné.*

5.

$$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \vdots \\ x_n \to +\infty}} \mathrm{F}_{\mathbf{X}}(x) = 1$$

Důkaz. Důkaz stačí provést pouze pro $n = 2$ a stejný princip lze použít i pro $m > 2$. Označme tedy $X_1 = X$ a $X_2 = Y$, potom tedy

1. Monotonie je zřejmá, protože nechť $x \leq \tilde{x}, y \leq \tilde{y}$. Potom

$$\mathrm{F}_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$$

   a protože platí $\{X \leq x\} \subset \{X \leq \tilde{x}\}$ a $\{Y \leq y\} \subset \{Y \leq \tilde{y}\}$, potom

$$\mathrm{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) \leq \mathrm{P}(\{X \leq \tilde{x}\} \cap \{Y \leq \tilde{y}\}) = \mathrm{F}_{X,Y}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

2. Z věty o spojitosti pravděpodobnosti víme, že limita existuje, a můžeme tedy pracovat s libovolnou posloupností vybranou. Vyberme tedy $x_n = n$, potom dle věty o spojitosti pravděpodobnosti

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}_{X,Y}(x, y) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{F}_{X,Y}(n, y) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\{X \leq n\} \cap \{Y \leq y\}\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} \left(\{X \leq n\} \cap \{Y \leq y\}\right)\right) = \mathrm{P}\left((\cup_{n=1}^{\infty} \{X \leq n\}) \cap \{Y \leq y\}\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(Y \leq y\right) = \mathrm{F}_Y(y)$$

3. Důkaz je prostou obměnou předchozího. Místo $x_n = n$ stačí vzít $x_n = -n$.

4.

$$\lim_{x \to a+} \mathrm{F}_{X,Y}(x, y) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{F}_{X,Y}\left(a + \frac{1}{2^n}, y\right) =$$
$$= \{ \text{ věta o spojitosti pravděpodobnosti } \} = \mathrm{F}_{X,Y}(a, y)$$

5. Pokud bychom to chtěli dokazovat přes postupné limity, tj. například přes

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \mathrm{F}_{X,Y}(x,y) = \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} \mathrm{F}_{X,Y}(x,y)$$

museli bychom dokázat že limita vůbec existuje, což není nejjednodušší. Lepší bude jít na to přes vztah

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists K)\,(\forall x, y > K)\,(|\mathrm{F}(x,y) - 1| < \varepsilon)$$

□

Poznámka 1.57. *Zavádíme označení*

1.

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_{X,Y}(x,y) = \mathrm{F}_{X,Y}(\infty, y) = \mathrm{F}_Y(y)$$

2.

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}(\infty,\ldots,\infty,x_j,\infty,\ldots,\infty) = \mathrm{F}_{X_j}(x_j)$$

Poznámka 1.58. *Nechť* $\mathrm{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *splňuje vlastnosti (1) až (4), nebo (a) až (e). Potom existuje taková náhodná veličina* X *pravděpodobnostního prostoru, že* $\mathrm{F}_X = \mathrm{F}$.

Věta 1.59. *Budte* X, Y *náhodné veličiny. Potom platí*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2\right) &= \mathrm{F}_{X,Y}(b_1,b_2) - \\ -\mathrm{F}_{X,Y}(b_1,a_2) &- \mathrm{F}_{X,Y}(a_1,b_2) + \mathrm{F}_{X,Y}(a_1,a_2)\end{aligned} \tag{12}$$

Důkaz. Označme

$$A = \{a_1 < X \le b_1, Y \le b_2\}$$
$$B = \{a_2 < Y \le b_2, X \le b_1\}$$

Chceme zjistit $\mathrm{P}(A\cap B)$, a to je

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cup B) = \underbrace{\mathrm{P}(X \le b_1, Y \le b_2) - \mathrm{F}_{X,Y}(a_1,b_2)}_{\mathrm{P}(A)} +$$

$$+ \underbrace{\mathrm{F}_{X,Y}(b_1,b_2) - \mathrm{F}_{X,Y}(b_1,a_2)}_{\mathrm{P}(B)} - \underbrace{\mathrm{F}_{X,Y}(b_1,b_2) - \mathrm{F}_{X,Y}(a_1,a_2)}_{\mathrm{P}(A\cup B)} =$$

$$= \mathrm{F}_{X,Y}(b_1,b_2) - \mathrm{F}_{X,Y}(a_1,b_2) - \mathrm{F}_{X,Y}(b_1,a_2) + \mathrm{F}_{X,Y}(a_1,a_2)$$

□

Příklad 1.60 (Měření rovinného obrazce)**.** *Měřme rovinný obrazec a uvažujme dvě náhodné veličiny - X jako šířku a Y jako délku. Potom má smysl ptát se na pravděpodobnost* $\mathrm{P}\left(20 < X \le 30, Y \le 50\right)$.

Definice 1.61 (Stochastická nezávislost)**.** *Říkáme, že náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ jsou* ***stochasticky nezávislé****, právě když*

$$\left(\forall (B_j)_{j=1}^{N,\infty} \in \mathcal{B}\right) (\textit{ jsou jevy } \{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_n \in B_n\}, \ldots \textit{ nezávislé}) \tag{13}$$

tj. pokud pro každou konečnou k-tici jevů platí

$$\mathrm{P}\left(\cap_{j=1}^{k} \{X_{i_j} \in B_{i_j}\}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}\left(\{X_{i_j} \in B_{i_j}\}\right)$$

V předchozí definici jsou využívány borelovské množiny, ale vyvstává otázka, zda není možné využít nějaký jiný systém množin? Jak uvidíme z následující věty (a jejích důsledků), možné to je. Podobně jako v případě alternativní definice náhodné veličiny je možné Borelovskou σ-algebru zaměnit za libovolný systém generující Borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}$.

Věta 1.62 (Monotone class theorem)**.** *Buď $\tau \subset 2^\Omega$ takový, že $\Omega \in \tau$, uzavřený na konečné průniky. Buď $\mathcal{B}$ nejmenší systém množin obsahující τ, uzavřený na limitu zdola (tj. $A_i \in \mathcal{B}$, $A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \Rightarrow \cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$) a na rozdíly (tj. $A \subset B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{B}$). Potom $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$*

Náznak důkazu. Buď $\tau \subset \mathcal{B} \wedge \mathcal{B}$ je uzavřená na rozdíly a limitu zdola. Volíme pevné B, pak definujeme $C_B = \{A \in \mathcal{B} | A \cap B \in \mathcal{B}\}$

$B \in \tau \Rightarrow$ ukážeme, že $C_B = \mathcal{B}$

$B \in \mathcal{B} \Rightarrow$ ukážeme, že $C_B = \mathcal{B}$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ je σ-algebra $\Rightarrow \sigma(\tau) = \mathcal{B}$ □

Poznámka 1.63. *$\mathcal{B}$ z MCT nemusí být nutně Borelovské množiny.*

Věta 1.64 (Důsledek MCT)**.** *Systém $\mathcal{B}$ z definice stochastické nezávislosti lze ekvivalentně zaměnit za libovolný systém $\tau \subset 2^{\mathbb{R}}$ takový, že $\mathbb{R} \in \tau$ a τ je uzavřený vzhledem ke konečným průnikům a $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$. Za uvedených předpokladů tedy platí:*

$$(\forall B_j \in \mathcal{B} \textit{ jsou } \{X_i \in B_i\} \textit{ nezávislé}) \Leftrightarrow (\forall A_j \in \tau \textit{ jsou } \{X_i \in A_i\} \textit{ nezávislé})$$

Důkaz.

$\Rightarrow$ Nechť jsou pro všechny borelovské množiny B_i jevy $\{X_i \in B_i\}$ nezávislé. Protože ale podle předpokladu platí $\tau \subset \mathcal{B}$, potom tvrzení evidentně platí i pro všechny $A_i \in \tau$.

$\Leftarrow$ Nechť nyní pro všechny množiny $A_i \in \tau$ jsou jevy $\{X_i \in A_i\}$ nezávislé. Zvolme nyní $B \in \mathcal{B}$ libovolně pevně a definujme

$$C = \{B_1 \in \mathcal{B} \mid \mathrm{P}\left(X_1 \in B_1, X_2 \in B\right) = \mathrm{P}\left(X_1 \in B_1\right) \mathrm{P}\left(X_2 \in B\right)\}$$

1. $\mathcal{R} \in C$, protože $\mathcal{R} \in \tau$ a pro všechna $A_j, A_k \in \tau$ platí

$$\mathrm{P}\left((x_j \in A_j) \cap (x_k \in A_k)\right) = \mathrm{P}\left(x_j \in A_j\right) \mathrm{P}\left(x_k \in A_k\right)$$

2. $B_1 \subset B_2 \in C \Rightarrow B_2 \setminus B_1 \in C$, protože

$$\mathrm{P}\left(X_1 \in B_2 \setminus B_1, X_2 \in B\right) = \mathrm{P}\left(X_1 \in B_2, X_2 \in B\right) -$$

$$-\mathrm{P}\left(X_1 \in B_1, X_2 \in B\right) = \mathrm{P}\left(X_2 \in B\right)\left(\mathrm{P}\left(X_1 \in B_2\right) - \mathrm{P}\left(X_1 \in B_1\right)\right)$$

3. $B_j \in C, B_j \nearrow \tilde{B} \Rightarrow \tilde{B} \in C$, protože

$$\mathrm{P}\left(X_1 \in \tilde{B}, X_2 \in B\right) = \mathrm{P}\left(X_1 \in \cup_{j=1}^{\infty} B_j, X_2 \in B\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(X_1 \in \sum_{j=0}^{\infty}\left(B_{j+1} - B_j\right), X_2 \in B\right) \text{ [2]} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_1 \in \left(B_{j+1} - B_j\right), X_2 \in B\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(X_2 \in B\right) \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_1 \in \left(B_{j+1} - B_j\right)\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(X_1 \in \tilde{B}\right) \mathrm{P}\left(X_2 \in B\right)$$

Z předpokladů víme tedy, že $\tau \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{R} \in \tau$ a že τ je uzavřený na konečné průniky (z předpokladů). Systém C je uzavřený na rozdíly a limity zdola (a jedná se tedy o systém $\mathcal{B}$ z MCT, resp. $\sigma(\tau) \subset C$, protože nemáme zaručeno že je to nejmenší systém s danými vlastnosti. Ale protože my jsme tyto vlastnosti chtěli ověřit pro systém $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$, je tato implikace (a tím i celý důkaz) ukončena.

□

Nemusíme tedy složitě hledat $\sigma(\tau)$, resp. $\mathcal{B}$ a složitě ověřovat nezávislost v tak obecném případě, ale stačí nám zvolit si vhodný systém uzavřený na konečné průniky, pro který $\Omega \in \tau$ a $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$ a ověřit celý problém nezávislosti na něm. Dle věty 1.42 můžeme volit různé systémy. Pokud zvolíme například $\tau = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, můžeme definici stochastické nezávislosti 1.61 předefinovat následujícím způsobem:

Definice 1.65. *Buďte* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *náhodné veličiny. Potom říkáme, že* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou stochasticky nezávislé, právě když pro* $\forall\left(a_i, b_i \in \mathbb{R}\right)\left(\forall i \in \widehat{n}\right)$ *platí, že* $\{a_i < X_i \leq b_i\}$ *jsou nezávislé jevy.*

Věta 1.66. *Náhodné veličiny* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *jsou stochasticky nezávislé právě tehdy, když*

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}(x) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{F}_{X_j}(x_j) \quad \forall x_j \in \mathrm{R} \tag{14}$$

Důkaz.

[2] $B_0 = \emptyset$

$\Rightarrow$ Nechť jsou náhodné veličiny stochasticky nezávislé. Zvolme si vhodně systém τ. Nejlepší bude $\tau = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathcal{R}\}$, protože přes množiny $(-\infty, a]$ je definována distribuční funkce, totiž

$$\mathrm{F}_X(a) = \mathrm{P}\left(\{X \leq a\}\right) = \mathrm{P}\left(\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}\right)$$

Zároveň ale $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$, takže $(\forall A_j \in \tau)\,(A_j = (-\infty, a_j])$ platí

$$\prod_{j=1}^{n} \mathrm{F}_{X_j}(a_j) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}\left(\{X_j \in (-\infty, a_j]\}\right) = \mathrm{P}\left(\cap_{j=1}^{n} \{X_j \in (-\infty, a_j]\}\right) = \mathrm{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{a})$$

a to pro libovolnou volbu $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \widehat{n}$.

$\Leftarrow$ Nechť

$$\prod_{j=1}^{n} \mathrm{F}_{X_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}\left(X_j \leq x_j\right) = \mathrm{P}\left(\cap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x_j\}\right) = \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(x) \qquad \forall x_j \in \mathcal{R}$$

Platí to ale pro libovolnou k-tici? Nechť to platí pro n, ukážeme že to platí pro $n-1$.

$$\mathrm{F}_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lim_{x_n \to +\infty} \mathrm{F}_X(x) = \lim_{x_n \to +\infty} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{F}_{X_j}(x_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{F}_{X_j}(x_j) \lim_{x_n \to \infty} \mathrm{F}_{X_n}(x_n) = \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{F}_{X_j}(x_j)$$

Takže to platí i pro libovolnou k-tici.

□