1. Numerické řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice

Hledáme řešení rovnice $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Řekneme, že úloha je numericky vyřešena, právě když se podaří sestavit řešení ve tvaru $y(x_0 + h) \doteq y(x_0) + \Delta y_0(x_0, y_0, h)$.

1.1. **Analytická metoda.**

Provedeme Taylorův rozvoj funkce y:

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \cdots$$

Dále platí

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = f_0$$

Tento vztah můžeme dál derivovat

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y'(x_0) = f_x + f_y f_0,$$

$$\begin{aligned} y'''(x_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) y'(x_0) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) y'^2(x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y''(x_0) = \\ &= f_{x^2} + 2 f_{xy} f_0 + f_{y^2} f_0^2 + f_y(f_x + f_y f_0) \end{aligned}$$

a tak lze pokračovat libovolně dlouho (za předpokladu, že f má derivace dostatečně vysokého řádu).

1.2. **Runge-Kuttovy metody.**

Předchozí metoda je výpočetně náročná, proto se v praxi používají následující metody, kde přírůstek hledáme ve tvaru

$$\Delta y_0 = p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h) + \cdots + p_r k_r(h),$$

kde $k_i(h) = hf(\xi_i(h), \eta_i(h))$, $\xi_i(h) = x_0 + \alpha_i h$, $\eta_i = y_0 + \beta_{i1} k_1(h) + \beta_{i2} k_2(h) + \cdots + \beta_{i,i-1} k_{i-1}(h)$, $\alpha_1 = 0$.

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x_0, y_0) \\ k_2(h) &= hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1(h)) \\ k_3(h) &= hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)) \\ &\vdots \\ k_r(h) &= hf(x_0 + \alpha_r h, y_0 + \beta_{r1} k_1(h) + \cdots + \beta_{r,r-1} k_{r-1}(h)) \end{aligned}$$

$$y(x_0 + h) \doteq y(x_0) + \underbrace{p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h) + \cdots + p_r k_r(h)}_{\text{Runge-Kuttovský přírůstek}}.$$

Pod pojmem „skutečný přírůstek“ rozumíme $y(x_0 + h) - y(x_0)$. Zbývá vyřešit volbu α, β, p.

Pokud rozvineme Runge-Kuttovský a skutečný přírůstek v mocninách h, chceme, aby se rozvoje shodovaly do co možná nejvyšší mocniny h. Budou-li se shodovat až do h^p, je chyba řádu h^{p+1}. Toho chceme dosáhnout pro libovolnou volbu pravé strany. Z toho budeme vycházet při volbě koeficientů α, β, p.

Označme rozdíl mezi správnou a spočtenou hodnotou

$$\varphi_r(h) = [y(x_0 + h) - y(x_0)] - [p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h) + \cdots + p_r k_r(h)].$$

Výše uvedená podmínka pak odpovídá podmínce

$$\varphi_r(0) = \varphi_r'(0) = \cdots = \varphi_r^{(s)}(0) = 0.$$

Pro $r = 1$:

$$\varphi_1(h) = [y(x_0 + h) - y(x_0)] - [p_1 h f(x_0, y_0)]$$
$$\varphi_1'(0) = y'(x_0) - p_1 f_0 = f_0 - p_1 f_0 = (1 - p_1) f_0$$

z toho vychází podmínka $p_1 = 1$. Výsledná metoda

$$y(x_0 + h) \doteq y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

se označuje jako Eulerova. Pro $r = 2$:

$$\varphi_2(h) = [y(x_0 + h) - y(x_0)] - [p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h)]$$

$$\begin{aligned}
k_1(h) &= hf(x_0, y_0) \\
k_2(h) &= hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1(h)) \\
k_1'(h) &= f(x_0, y_0) \\
k_2'(h) &= f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1(h)) + h \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k_1'(h) \right] \\
k_1''(h) &= 0 \\
k_2''(h) &= 2 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1(h)) + \frac{\partial f}{\partial y} \beta_{21} k_1'(h) \right] + h[\cdots]'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1'(0) &= f_0 & \qquad k_1''(0) &= 0 \\
k_2'(0) &= f_0 & \qquad k_2''(0) &= 2(\alpha_2 f_x + \beta_{21} f_y f_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(x) &= f(x, y) & \qquad y'(x_0) &= f_0 \\
y''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) y'(x) & \qquad y''(x_0) &= f_x + f_y f_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \varphi_2'(0) &= f_0 - [p_1 f_0 + p_2 f_0] = [1 - p_1 - p_2] f_0 \\
0 = \varphi_2''(0) &= f_x + f_y f_0 - 2p_2(\alpha_2 f_x + \beta_{21} f_y f_0) = [1 - 2\alpha_2 p_2] f_x + [1 - 2\beta_{21} p_2] f_y f_0
\end{aligned}$$

Z toho vyplývá podmínka

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 &= 1 \\
2\alpha_2 p_2 &= 1 \\
2\beta_{21} p_2 &= 1.
\end{aligned}$$

V praxi se užívají následující volby:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \beta_{21} = 1 & \qquad \alpha_2 &= \beta_{21} = \frac{1}{2} \\
p_1 &= p_2 = \frac{1}{2} & \qquad p_1 &= 0 \quad p_2 = 1 \\
k_1 &= hf(x_0, y_0) & \qquad k_1 &= hf(x_0, y_0) \\
k_2 &= hf(x_0 + h, y_0 + h) & \qquad k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) & \qquad y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + k_2
\end{aligned}$$

Pro $r = 3$:

$$\varphi_3(h) = [y(x_0 + h) - y(x_0)] - [p_1 k_1(h) + p_2 k_2(h) + p_3 k_3(h)]$$

$$
\begin{aligned}
k_1(h) &= hf(x_0, y_0) \\
k_2(h) &= hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1) \\
k_3(h) &= hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \\
k_1'(h) &= f(x_0, y_0) \\
k_2'(h) &= f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1) + h\left[\frac{\partial f}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\beta_{21} k_1'\right] \\
k_3'(h) &= f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) + h\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(\beta_{31} k_1' + \beta_{32} k_2')\right] \\
k_1''(h) &= 0 \\
k_2''(h) &= 2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1)\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\beta_{21} k'\right] + h[\cdots]' \\
k_3''(h) &= 2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2)\alpha_3 + \frac{\partial f}{\partial y}(\beta_{31} k_1' + \beta_{32} k_2')\right] + h[\cdots]' \\
k_1'''(h) &= 0 \\
k_2'''(h) &= 3\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1)\alpha_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha_2 \beta_{21} k_1' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\beta_{21} k_1')^2\right] + \\
&\quad + h[\cdots]'' \\
k_3'''(h) &= 3\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2)\alpha_3^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha_3(\beta_{31} k_1' + \beta_{32} k_2') + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\beta_{31} k_1' + \beta_{32} k_2') + \frac{\partial f}{\partial y}(\beta_{31} k_1'' + \beta_{32} k_2'')\right] + h[\cdots]''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1'(0) &= f_0 \\
k_1''(0) &= 0 \\
k_1'''(0) &= 0 \\
k_2'(0) &= f_0 \\
k_2''(0) &= 2(\alpha_2 f_x + \beta_{21} f_y f_0) \\
k_2'''(0) &= 3(\alpha_2^2 f_{x^2} + 2\alpha_2 \beta_{21} f_{xy} f_0 + \beta_{21}^2 f_{y^2} f_0^2) \\
k_3'(0) &= 0 \\
k_3''(0) &= 2(\alpha_3 f_x + (\beta_{31} + \beta_{32}) f_y f_0 \\
k_3'''(0) &= 3(\alpha_3^2 f_{x^2} + 2\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) f_{xy} f_0 + (\beta_{31} + \beta_{32})^2 f_{y^2} f_0^2 + \\
&\quad + 2\beta_{32} f_y(\alpha_2 f_x + \beta_{21} f_y f_0))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f(x, y) \\
y''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) y'(x) \\
y'''(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) y'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) y'^2(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) y''(x) \\
y'(x_0) &= f_0 \\
y''(x_0) &= f_x + f_y f_0 \\
y'''(x_0) &= f_{x^2} + 2 f_{xy} f_0 + f_{y^2} f_0^2 + f_y(f_x + f_y f_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_3'(0) &= f_0 - [p_1 f_0 + p_2 f_0 + p_3 f_0] = [1 - p_1 - p_2 - p_3] \\
\varphi_3''(0) &= f_x + f_y f_0 - [2p_2(\alpha_2 f_x + \beta_{21} f_y f_0) + 2p_3(\alpha_3 f_x + (\beta_{31} + \beta_{32}) f_y f_0)] = \\
&= f_x[1 - 2\alpha_2 p_2 - 2\alpha_3 p_3] + f_y f_0[1 - 2p_2\beta_{21} - 2p_3(\beta_{31} + \beta_{32})] \\
\varphi_3'''(0) &= f_{x^2}[1 - 3p_2\alpha_2^2 - 3p_3\alpha_3^2] + f_{xy} f_0[2 - 6p_2\alpha_2\beta_{21} - 6p_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32})] + \\
&\quad + f_0^2 f_{y^2}[1 - 3p_2\beta_{21}^2 - 3p_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2] + f_y f_x[1 - 6p_3\alpha_2\beta_{32}] + \\
&\quad + f_y^2 f_0[1 - 6p_3\beta_{21}\beta_{32}],
\end{aligned}
$$

z toho dostáváme

$$
\begin{aligned}
1 - p_1 - p_2 - p_3 &= 0 \\
1 - 2\alpha_2 p_2 - 2\alpha_3 p_3 &= 0 \\
1 - 2p_2\beta_{21} - 2p_3(\beta_{31} + \beta_{32}) &= 0 \\
1 - 3p_2\alpha_2^2 - 3p_3\alpha_3^2 &= 0 \\
2 - 6p_2\alpha_2\beta_{21} - 6p_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) &= 0 \\
1 - 3p_2\beta_{21}^2 - 3p_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 &= 0 \\
1 - 6p_3\alpha_2\beta_{32} &= 0 \\
1 - 6p_3\beta_{21}\beta_{32} &= 0
\end{aligned}
$$

Tyto rovnice jsou ovšem závislé a jsou ekvivalentní s následující soustavou:

$$
\begin{aligned}
1 &= p_1 + p_2 + p_3 \\
\frac{1}{2} &= p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 \\
1 &= 3p_2\alpha_2^2 + 3p_3\alpha_3^2 \\
\alpha_2 &= \beta_{21} \\
\alpha_3 &= \beta_{31} + \beta_{32} \\
\frac{1}{6} &= p_3\beta_{32}\alpha_2.
\end{aligned}
$$

Každé řešení této soustavy dává Runge-Kuttovu metodu. Čtvrtá derivace nulovat nejde. V praxi se používají následující metody:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf(x_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2) \\
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
\end{aligned}
$$

nebo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{3}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{2h}{3}, y_0 + \frac{2k_2}{3}\right) \\
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3).
\end{aligned}
$$

Pro $r = 4$: Pokud sestavíme polynomy pro $r = 4$ a požadovali $\varphi^{(4)} = 0$, dojdeme k následujícím 11 podmínkám:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \beta_{21} \\
\alpha_3 &= \beta_{31} + \beta_{32} \\
\alpha_4 &= \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} \\
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \\
p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + p_4\alpha_4 &= \frac{1}{2} \\
p_2\alpha_2^2 + p_3\alpha_3^2 + p_4\alpha_4^2 &= \frac{1}{4} \\
p_2\alpha_2^3 + p_3\alpha_3^3 + p_4\alpha_4^3 &= \frac{1}{4} \\
p_3\beta_{32}\alpha_2 + p_4\beta_{42}\alpha_2 + p_4\beta_{43}\alpha_3 &= \frac{1}{6} \\
p_3\beta_{32}\alpha_2\alpha_3 + p_4\beta_{42}\alpha_2\alpha_4 + p_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_4 &= \frac{1}{8} \\
p_3\beta_{32}\alpha_2^2 + p_4\beta_{42}\alpha_2^2 + p_4\beta_{43}\alpha_3^2 &= \frac{1}{12} \\
p_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2 &= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Máme 13 neznámých, ale $\varphi_4^{(5)}$ už nejde nulovat. Uvedeme následující tři metody.

(1) Standardní Runge-Kuttova metoda:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3) \\
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

(2) Tříosminové pravidlo:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{3}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{2h}{3}, y_0 - \frac{k_1}{3} + k_2\right) \\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1 - k_2 + k_3) \\
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0)\\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{4}, y_0 + \frac{k_1}{4}\right)\\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 - \frac{k_2}{2}\right)\\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1 - 2k_2 + 2k_3)\\
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + 4k_4)
\end{aligned}$$

Abychom dosáhli maximální chyby $O(h^6)$, nevystačíme s $r = 5$, ale až s $r = 6$. Proto se používají zejména metody s $r = 4$.

V praxi se nejčastěji používají metody s automatickým výběrem kroku. Nejjednodušší způsob je spočítat následující hodnotu s krokem h a $h/2$, je-li relativní rozdíl větší než nějaké ε, interval se dále půlí. Případně se krok může zase prodlužovat — např. mám počitadlo, kolikrát odchylka vyhovovala a když dosáhne určité hodnoty, zase zkusím krok prodloužit.

Příklad 1.1. Řešme rovnici $y' = y$, $y(0) = 1$. Víme, že řešením je $y(x) = e^x$. Pokud použijeme standardní Runge-Kuttovu metodu, máme

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.1 * 1 = 0.1\\
k_2 &= 0.1 * 1.05 = 0.105\\
k_3 &= 0.1 * 1.0525 = 0.10525\\
k_4 &= 0.1 * 1.10525 = 0.110525\\
y(0.1) &= 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 0.21 + 0.2105 + 0.110525] = 1 + \frac{1}{6} * 0.631025 \doteq 1.1051708333,
\end{aligned}$$

přičemž $e^{0.1} = 1.105170918$.

Kteroukoli z Runge-Kuttových metod pro rovnici lze použít i pro systém rovnic.

Příklad 1.2. Mějme systém rovnic $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$ s počátečními podmínkami $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$. Standardní Runge Kuttova metoda pro tento systém je

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0, z_0) & l_1 &= hg(x_0, y_0, z_0)\\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) & l_2 &= hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right)\\
k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right) & l_3 &= hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right)\\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3) & l_4 &= hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\\
z(x_0 + h) &\doteq z(x_0) + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)
\end{aligned}$$

Rovnici n-tého řádu lze převést na systém a pak řešit Runge-Kuttovou metodou. Pro rovnici druhého řádu $y'' = f(x, y, y')$ existuje přímo Runge-Kutta-Nyströmův vzorec

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{h^2}{2} f(x_0, y_0, y_0') \\
k_2 &= \frac{h^2}{2} f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} y_0' + \frac{k_1}{4}, y_0' + \frac{k_1}{h}\right) \\
k_3 &= \frac{h^2}{2} f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} y_0' + \frac{k_2}{4}, y_0' + \frac{k_2}{h}\right) \\
k_4 &= \frac{h^2}{2} f\left(x_0 + h, y_0 + h y_0' + k_3, y_0' + \frac{2k_3}{h}\right) \\
y(x_0 + h) &\doteq y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3) \\
y'(x_0 + h) &\doteq y'(x_0) + \frac{1}{3h}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

1.3. **Řešení lineárních diferenčních rovnic.** Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu nazýváme rovnici

$$a_k(n) y_{n+k} + a_{k-1}(n) y_{n+k-1} + \cdots + a_0(n) y_n = b_n,$$

kde $a_i(n)$, $b(n)$ jsou posloupnosti, $a_k(n) \neq 0$, $a_0(n) \neq 0$.

Řešením lineární diferenční rovnice je posloupnost y_n, která je jednoznačně dáno hodnotami $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, neboť pro y_i pak dostáváme jednoznačný rekurentní vztah. Pokud je $b(n) = 0$, nazýváme rovnici rovnicí bez pravé strany.

(1) Jsou-li $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)}$ řešení rovnice bez pravé strany, pak jejich lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_n^{(i)}$$

je také řešení.

(2) Jsou-li $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)}$ řešení rovnice bez pravé strany a platí-li

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \cdots & y_0^{(k)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{k-1}^{(1)} & y_{k-1}^{(2)} & \cdots & y_{k-1}^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0$$

a Y_n je řešení rovnice bez pravé strany, pak existují jednoznačná $c_1, c_2, \ldots, c_k$ taková, že

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i y_n^{(i)}.$$

Důkaz. Matice soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
c_1 y_0^{(1)} + c_2 y_0^{(2)} + \cdots + c_k y_0^{(k)} &= Y_0 \\
c_1 y_1^{(1)} + c_2 y_1^{(2)} + \cdots + c_k y_1^{(k)} &= Y_1 \\
&\vdots \\
c_1 y_{k-1}^{(1)} + c_2 y_{k-1}^{(2)} + \cdots + c_k y_{k-1}^{(k)} &= Y_{k-1}
\end{aligned}$$

je regulární, tudíž má jednoznačné řešení. $\square$

(3) Obecné řešení rovnice s pravou stranou má tvar

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y_n^{(i)} + p_n,$$

kde p_n je partikulární řešení.

1.4. **Diferenční rovnice s konstantními koeficienty.** Řešení rovnice tvaru

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = 0$$

hledáme ve tvaru $y_n = z^n$. Po dosazení

$$a_k z^{n+k} + a_{k-1} z^{n+k-1} + \cdots + a_0 z^n = 0$$

a po vykrácení z^n

$$a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_0 = 0$$

dostaneme **charakteristickou rovnici**. Je-li z_i r-násobný kořen, řeší rovnici z_i^n a dále také $nz_i^n, n^2 z_i^n, \dots, n^{r-1} z_i^n$.

Nástin důkazu. Dosazením do diferenční rovnice dostaneme

$$a_k (n+k) z^{n+k} + a_{k-1}(n+k-1) z^{n+k-1} + \cdots + a_0 n z^n,$$

po úpravě

$$n[\underbrace{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_0}_{\text{charakteristický polynom}}] + z[\underbrace{k a_k z^{k-1} + (k-1) a_{k-1} z^{k-2} + \cdots + a_1}_{\text{derivace charakteristického polynomu}}] = 0.$$

Protože z je r-násobný kořen, je kořenem i 1., 2. až $r-1$-té derivace. □

Věta 1.1. Nechť charakteristická rovnice má kořeny $z_1, z_2, \dots, z_s$ vzájemně různé, násobností $r_1, r_2, \dots, r_s$. Potom řešení

$$z_1^n, nz_1^n, \dots, n_1^{r-1} z_1^n, \dots, z_s^n, nz_s^n, \dots, n^{r_s-1} z_s^n$$

tvoří fundamentální systém.

Důkaz. Předpokládejme, že řešení jsou lineárně závislá. Potom pro každé n musí platit

$$p_1(n) z_1^n + p_2(n) z_2^n + \cdots + p_s(n) z_s^n = 0,$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_s$ jsou polynomy v n a alespoň jeden z nich je nenulový. Dokážeme, že to nemůže platit. To provedeme indukcí podle počtu nenulových polynomů s.

Pro $s = 1$: Buď $p_1(n) z_1^n = 0$. Po vykrácení z_1^n je $p_1(n) = 0$, což je spor.

$$p_1(n) z_1^n = -p_2(n) z_2^n - \ldots - p_s(n) z_s^n$$

Po vydělení z_1^n

$$p_1(n) = -p_2(n) \zeta_2^n - \ldots - p_s(n) \zeta_s^n,$$

kde $\zeta_i \neq 1$ a současně jsou vzájemně různá, neboť z_i jsou vzájemně různá. Tento vztah musí platit i pro $n+1$.

$$p_1(n+1) = -p_2(n+1) \zeta_2^{n+1} - \ldots - p_s(n) \zeta_s^{n+1}.$$

Odečtením dostaneme

$$p_1(n+1) - p_1(n) = -[p_2(n+1)\zeta_2 - p_2(n)] \zeta_2^n - \ldots - [p_s(n+1)\zeta_s - p_s(n+1)] \zeta_s^n.$$

Na levé straně máme teď polynom (ostře) nižšího stupně než p_1, protože nejvyšší mocniny se odečetly, naopak stupně polynomů na pravé straně se díky $\zeta_i \neq 1$ nezmění. Tímto způsobem lze postupně snížit stupeň levé strany až k nulovému polynomu. Podle indukčního předpokladu pak jsou všechny polynomy na pravé straně nulové. □

1.5. **Jednokrokové metody.**

Definice 1.1. Obecnou jednokrokovou metodou nazveme metodu danou formulí tvaru

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(x_n, y_n, h). \tag{1}$$

Definice 1.2. Formule (1) se nazývá **regulární**, jestliže funkce $\Phi_f(x, y, h)$ je definována a spojitá na množině, kde $x_0 \le x \le a$, $-\infty < y < +\infty$, $h \in \langle 0, h_0\rangle$ $(h_0 > 0)$ a existuje-li konstanta M (nezávislá na x a h) tak, že

$$|\Phi_f(x, y, h) - \Phi_f(x, z, h)| \le M\,|y - z| \tag{2}$$

pro každé $x \in \langle x_0, a\rangle$, $y, z \in (-\infty, +\infty)$ a $h \in \langle 0, h_0\rangle$.

Definice 1.3. Formule (1) se nazývá **stupně** p, existuje-li konstanta L a $p \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\left|\Phi_f(t, y, h) - \frac{r(t+h) - y}{h}\right| \le Lh^p \tag{3}$$

pro každé $t \in \langle x_0, a\rangle$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $h \in \langle 0, h_0\rangle$, kde $r(x)$ je řešení rovnice $y' = f(x, y)$ na intervalu $\langle t, t+h\rangle$ s počáteční podmínkou $r(t) = y$.

Poznámka 1.1. $|h\Phi_f(t, y, h) - (r(t+h) - r(t))| \le Lh^{p+1}$.

Věta 1.2. Nechť je dána regulární obecná jednokroková formule (1), která je stupně $p \in \mathbb{N}$. Nechť $y(x)$ je řešení rovnice $y' = f(x, y)$ a $y_0, y_1, \dots, y_N$ jsou hodnoty splňující vztah $y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(x_n, y_n, h) + \delta_n$ pro $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Pak pro $n = 0, 1, 2, \dots, N$ platí

$$|y_n - y(x_n)| \le |y_0 - y(x_0)|\, e^{M(x_n - x_0)} + \left(Lh^p + \frac{\delta}{h}\right)\frac{e^{M(x_n - x_0)} - 1}{M},$$

kde

$$\delta = \max_{n=0,\dots,N-1} |\delta_n|$$

a M a L jsou konstanty definované (2) a (3).

Důkaz. Buď $r_n = y_n - y(x_n)$ pro $n = 0, 1, \dots, N$. Platí, že

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_n + h\Phi_f(x_n, y_n, h) + \delta_n - y(x_{n+1}) = \\ &= \underbrace{(y_n - y(x_n))}_{r_n} + h[\Phi_f(x_n, y_n, h) - \Phi_f(x_n, y(x_n), h)] + \\ &\quad + h\left[\Phi_f(x_n, y(x_n), h) - \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h}\right] + \delta_n, \end{aligned}$$

s použitím $\delta \ge \delta_n$ a konstant M, L můžeme psát $|r_{n+1}| \le |r_n| + Mh\,|r_n| + Lh^{p+1} + \delta$. Zavedeme $R_0 = |r_0|$, $R_{n+1} = (1 + hM)R_n + Lh^{p+1} + \delta$, Platí, že $|r_n| \le R_n$. To dokážeme indukcí: $|r_{n+1}| \le R_n + MhR_n + Lh^{p+1} + \delta = R_{n+1}$.

Dostali jsme tak diferenční rovnici pro R_n. Rovnice bez pravé strany má tvar $R_{n+1} = (1+hM)R_n$, charakteristická rovnice je $z - (1 + hM) = 0$, obecné řešení rovnice bez pravé strany má tvar $R_n = C(1 + hM)^n$.

Hledáme partikulární řešení ve tvaru $P = (1 + hM)P + Lh^{p+1} + \delta$, z čehož dostáváme

$$P = \frac{Lh^{p+1} + \delta}{hM}.$$

Nakonec doladíme konstantu C:

$$R_n = C(1 + hM)^n - \left(Lh^p + \frac{\delta}{h}\right)\frac{1}{M},$$

$$|r_0| = C - \left(Lh^p + \frac{\delta}{h}\right)\frac{1}{M},$$

$$C = |r_0| + \left(Lh^p + \frac{\delta}{h}\right)\frac{1}{M}.$$

Obecné řešení rovnice s pravou stranou má tvar

$$R_n = |r_0| (1 + hM)^n + \left(Lh^p + \frac{\delta}{h} \right) \frac{(1 + hM)^n - 1}{M}.$$

Protože $1 + x < e^x$, je

$$\begin{aligned} R_n &\leq |r_0| e^{nhM} + \left(Lh^p + \frac{\delta}{h} \right) \frac{e^{nhM} - 1}{M} = \\ &= |y_0 - y(x_0)| e^{(x_n - x_0)M} + \left(Lh^p + \frac{\delta}{h} \right) \frac{e^{M(x_n - x_0)} - 1}{M}. \quad \square \end{aligned}$$

Poznámka 1.2. První člen je způsoben počáteční podmínkou, druhý je chyba metody, δ je zaokrouhlovací chyba počítače. Nemá cenu jít s h pod jistou mez, protože jinak se bude zvětšovat chyba δ/h. Jediným způsobem jak zvýšit přesnost je pak metoda vyššího řádu.

Poznámka 1.3. Závislost chyby je dost špatná, dá se zkonstruovat rovnice, kdy to bude nejhorší — chyba bude exponenciálně závislá.

Definice 1.4. nechť rovnice $y' = f(x, y)$ na intervalu $\langle x_0, +\infty)$ má řešení $y(x) = 0$, tj. $0 = f(x, 0)$. Toto nulové řešení se nazývá **stabilní vzhledem k soustavným poruchám**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou spojitou funkci $\eta(x)$, která pro $x \in \langle x_0, +\infty)$ s výjimkou spočetného množství izolovaných bodů splňuje rovnici $\eta' = f(x, \eta) + g(x)$, kde $|\eta(0)| < \delta$, $|g(x)| \leq \delta$ pro $x \in \langle x_0, +\infty)$ a $g(x)$ je libovolná měřitelná funkce, platí nerovnost $|\eta(x)| < \varepsilon$ pro $x \in \langle x_0, +\infty)$, tj. poškodím-li počáteční podmínku a pravou stranu o δ, změní se řešení o ε.

Definice 1.5. Obecná jednokroková formule se nazývá **úplně regulární**, je-li funkce $\Phi_f(x, y, h)$ omezená, spojitá ve všech svých proměnných, stejnoměrně spojitá v x, lipschitzovská v y s konstantou M (nezávislou na x a h) a stejnoměrně spojitá v h.

Věta 1.3. Nechť je dána rovnice $y' = f(x, y)$ a na $\langle x_0, +\infty)$ platí $f(x, 0) = 0$. Nechť nulové řešení je stabilní vzhledem k soustavným poruchám. Nechť je dána úplně regulární jednokroková metoda (1) stupně $p \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existují $h_1, \delta > 0$ tak, že pro každé řešení diferenční rovnice $y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(x_n, y_n, h) + \delta_n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, pro které $|y_0| < \delta$, $\delta_n \leq h\delta$, $h < h_1$ splňuje nerovnost $|y_n| < \varepsilon$.

Důkaz. Buď

$$\eta(x) = y_n + \frac{y_{n+1} - y_n}{h}(x - x_n) = y_n + \left(\Phi_f(x_n, y_n, h) + \frac{\delta_n}{h} \right) (x - x_n)$$

pro $x \in \langle x_n, x_{n+1} \rangle$, $n = 0, 1, \ldots$. Buď $g(x) = \eta' - f(x, \eta)$, $|g(x)| \leq \delta_1$.

$$\begin{aligned} |\eta' - f(x, \eta)| &\leq \left| \Phi_f(x_n, y_n, h) + \frac{\delta_n}{h} - f(x, \eta) \right| \leq |\Phi_f(x_n, y_n, h) - \Phi_f(x_n, \eta, h)| + \\ &+ |\Phi_f(x_n, \eta, h) - \Phi_f(x, \eta, h)| + |\Phi_f(x, \eta, h) - f(x, \eta)| + \frac{|\delta_n|}{h} \end{aligned}$$

Protože Φ_f je lipschitzovské v y, je

$$|\Phi_f(x_n, y_n, h) - \Phi_f(x_n, \eta, h)| \leq M |\eta - y_n| \leq M \left| \Phi_f(x_n, y_n, h) + \frac{\delta_n}{h} \right| |x - x_0|.$$

To lze libovolně zmenšit volbou h_1 a δ.

Člen $|\Phi_f(x_n, \eta, h) - \Phi_f(x, \eta, h)|$ lze libovolně zmenšit volbou h_1 díky stejnoměrné spojitosti v x.

Buď $r'(x) = f(x, r(x))$, $r(x) = \eta(x)$. Protože

$$\lim_{h \to 0} \left| \Phi_f(x, \eta, h) - \frac{r(x + h) - \eta}{h} \right| = 0,$$

a Φ_f je spojitá v x, je $\Phi_f(x, \eta, 0) = r'(x) = f(x, \eta)$. Díky stejnoměrné spojitosti v h jde pro dostatečně malé h třetí člen k nule. $\square$

1.6. **Mnohokrokové (diferenční) metody.** Zabýváme se úlohou nalézt přibližné hodnoty řešení rovnice $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ v bodech $x_0, x_1, \dots$, přičemž $x_i = x_0 + ih$. K výpočtu y_{n+1} potřebujeme hodnoty $y_{m-k}, y_{m-k+1}, \dots, y_m$, ale do pravé strany dosazujeme pouze jednou. Problém je pouze na počátku — tam se musí použít Runge-Kutta nebo Taylor.

Vycházíme z toho, že pro přesné y_i platí

$$y_{m+1} = y_{m-j} + \int\limits_{x_{m-j}}^{x_{m+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Při numerickém výpočtu funkci $f(x,y(x))$ nahradíme interpolačním polynomem k uzlům $x_{m-k}, x_{m-k+1}, \dots, x_m$ nebo $x_{m-k}, x_{m-k+1}, \dots, x_m, x_{m+1}$. V prvním případě se jedná o **explicitní metody** — dostaneme explicitní vyjádření hodnoty y_{m+1}. V druhém případě jde o **implicitní metody** — ve vzorci vystoupí i $f(x_{m+1}, y_{m+1})$. Poté se buď y_{m+1} vypočte přímo z rovnice (méně obvyklé) nebo se vypočítá přibližná hodnota iteračně. Volbou $j = 0$ dostaneme tzv. **Adamsovy formule**.

1.6.1. *Explicitní Adamsovy formule.* Označme $f_i = f(x_i, y_i) = y'(x_i) = y'_i$. Použijeme Newtonův vzorec pro interpolaci vpřed, $f(x,y(x)) = L_{m,k}(x) + R_{m,k}(x)$, kde

$$L_{m,k}(x) = f_m + tf^1_{m-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2!}f^2_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{k!}f^k_{m-\frac{k}{2}},$$

$$\begin{aligned}R_{m,k} &= \frac{(x-x_m)(x-x_{m-1})\cdots(x-x_{m-k})}{(k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}f(\xi, y(\xi)) = \\ &= h^{k+1}\frac{t(t+1)\cdots(t+k)}{(k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}f(\xi, y(\xi)).\end{aligned}$$

Po dosazení do (4) máme

$$\underbrace{y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} L_{m,k}(x)\mathrm{d}x}_{\text{přibližný vzorec pro výpočet } y_{m+1}} + \underbrace{\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} R_{m,k}(x)\mathrm{d}x}_{\text{chyba v jednom kroku}},$$

po substituci $x = x_m + th$

$$y_{m+1} = y_m + h\int\limits_0^1 \left[f_m + tf^1_{m-\frac{1}{2}} + \dots + \frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{k!}f^k_{m-\frac{k}{2}}\right]\mathrm{d}t,$$

$$y_{m+1} = y_m + h[f_m + a_1 f^2_{m-\frac{1}{2}} + \dots + a_k f^k_{m-\frac{k}{2}}] + l_{m,k},$$

kde

$$a_i = \int\limits_0^1 \frac{t(t+1)\cdots(t+i-1)}{i!}\mathrm{d}t.$$

Některá a:

$$a_1 = \int\limits_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, a_2 = \int\limits_0^1 \frac{t(t+1)}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{12},\ a_3 = \frac{3}{8},\ a_4 = \frac{251}{720},$$

$$a_5 = \frac{95}{288},\ a_6 = \frac{19087}{60480},\ a_7 = \frac{5275}{17280},\ a_8 = \frac{1070017}{3628800}.$$

Užití Adamsových vzorců:

$$f^k_i = f_{i+\frac{k}{2}} - \binom{k}{1}f_{i+\frac{k}{2}-1} + \binom{k}{2}f_{i+\frac{k}{2}-2} - \dots + (-1)^k\binom{k}{k}f_{i-\frac{k}{2}}$$

$$y_{m+1} \doteq y_m + h\left[y'_m + \frac{1}{2}(y'_m - y'_{m-1}) + \frac{5}{12}(y'_m - 2y'_{m-1} + y'_{m-2}) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}(y'_m - 3y'_{m-1} + 3y'_{m-2} - y'_{m-3}) \cdots \right]$$

$$k = 0: \ y_{m+1} \doteq y_m + hy'_m$$
$$k = 1: \ y_{m+1} \doteq y_m + \frac{h}{2}[3y'_m - y_{m-1}]$$
$$k = 2: \ y_{m+1} \doteq y_m + \frac{h}{12}[23y'_m - 16y'_{m-1} + 5y'_{m-2}]$$
$$k = 3: \ y_{m+1} \doteq y_m + \frac{h}{24}[55y'_m - 59y'_{m-1} + 37y'_{m-2} - 9y'_{m-3}].$$

Chyba $l_{m,k}$ bude

$$l_{m,k} = \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} R_{m,k}(x)\mathrm{d}x = h^{k+2}\int\limits_0^1 \frac{t(t+1)\cdots(t+k)}{(k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}f(\xi, y(\xi))\mathrm{d}t =$$
$$= h^{k+2}y^{(k+2)}(\eta)a_{k+2}.$$

Zkráceně $|l_{m+k}| \leq h^{k+2}a_{k+1}M_{k+2}$.

1.6.2. *Implicitní Adamsovy formule.* Opět použijeme vzorec pro interpolaci vpřed, $f(x, y(x)) = L_{m,k}(x) + R_{m,k}(x)$,

$$L_{m,k}(x) = f_{m+1} + tf^1_{m+\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2!}f^2_m + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+k)}{(k+1)!}f^{k+1}_{m-\frac{k-1}{2}},$$

$$R_{m,k}(x)h^{k+2}\frac{t(t+1)\cdots(t+k+1)}{(k+2)!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+2}}f(\xi, y(\xi)).$$

Dosadíme do (4),

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} L_{m,k}(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} R_{m,k}(x)\mathrm{d}x.$$

Zavedeme substituci,

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{-1}^{0} L_{m,k}(x)\mathrm{d}t + l_{m,k} =$$
$$= y_m + h\left[f_{m+1} + b_1 f^1_{m+\frac{1}{2}} + b_2 f^2_m + \cdots + b_{k+1}f_{m-\frac{k-1}{2}^{k+1}}\right] + l_{m,k},$$

kde

$$b_i = \int\limits_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\cdots(t+i-1)}{i!}\mathrm{d}t.$$

Uvedeme některá b:

$$b_1 = \int\limits_{-1}^{0} t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}, \ b_2 = -\frac{1}{12}, \ b_3 = -\frac{1}{24}, b_4 = -\frac{13}{720},$$
$$b_5 = -\frac{9}{160}, \ b_6 = -\frac{863}{60480}, b_7 = -\frac{275}{24135}, \ b_8 = -\frac{33953}{3628800}.$$

Konkrétní metody:

$$k=-1:\ \ y_{m+1}\doteq y_m+hy'_{m+1}$$
$$k=0:\ \ y_{m+1}\doteq y_m+\frac{h}{2}[y'_{m+1}+y'_m]$$
$$k=1:\ \ y_{m+1}\doteq y_m+\frac{h}{12}[5y'_{m+1}+8y'_m-1y'_{m-1}]$$
$$k=2:\ \ y_{m+1}\doteq y_m+\frac{h}{24}[9y'_{m+1}+19y'_m-5y'_{m-1}+y'_{m-2}]$$
$$k=3:\ \ y_{m+1}\doteq y_m+\frac{h}{720}[251y'_{m+1}+646y'_m-264y'_{m-1}+106y'_{m-2}-19y'_{m-3}]$$

Chyba aproximace je

$$l_{m,k}=\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}}R_{m,k}(x)\mathrm{d}x=h^{k+3}\int\limits_{-1}^{0}\frac{t(t+1)\cdots(t+k+1)}{(k+2)!}\frac{\mathrm{d}^{k+2}}{\mathrm{d}x^{k+2}}f(\xi,y(\xi))\mathrm{d}t=$$
$$=h^{k+3}y^{(k+3)}(\eta)b_{k+2},$$

celkem $|l_{n,k}|\leq h^{k+3}\left|b_{k+2}\right|M_{k+3}$.

Implicitní metody se používají v tzv. **metodách prediktor-korektor**. Nejprve se vypočte y_{m+1} pomocí explicitního vzorce, pak se získaná hodnota dosadí do pravé strany implicitního vzorce. Lze dokázat, že nová hodnota y_{m+1} je přesnější.

Definice 1.6. Obecná diferenční formule k-tého řádu pro řešení rovnice $y'=f(x,y)$ je formule tvaru

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i}=h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f(x_{n+i},y_{n+i}),\tag{5}$$

kde $n\in\{0,1,\dots,N-k\}$ a $a_k\neq 0$. Pro $\beta_k=0$ je to **explicitní formule**, pro $\beta_k\neq 0$ je to **implicitní formule**.

Definice 1.7. Diferenční formule (5) se nazývá **stupně** $p\in\mathbb{N}_0$, jestliže platí následujících $p+1$ podmínek:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i=0$$
$$\sum_{i=0}^{k}\frac{i^s\alpha_i}{s!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{i^{s-1}\beta_i}{(s-1)!}\quad \text{pro } s=1,\dots,p.$$

Známe-li hodnoty $y_n,y_{n+1},\dots,y_{n+k-1}$ přesně a vypočítáme-li y_{n+k}, je to s přesností $O(h^{p+1})$.

Důkaz.

$$\sum_{i=0}^{k}[\alpha_i y(x_n+ih)-h\beta_i f(x_n+ih,y(x_n+ih))]=$$
$$=\sum_{i=0}^{k}[\alpha_i y(x_n+ih)-h\beta_i y'(x_n+ih)]=c_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n)+O(h^{p+1})$$

$$y(x_n+ih)=y(x_n)+ihy'(x_n)+\frac{(ih)^2}{2!}y''(x_n)+\cdots+\frac{(ih)^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(x_n)+$$
$$+\frac{(ih)^{p+2}}{(p+2)!}y^{(p+2)}(\xi_1)$$
$$y'(x_n+ih)=y'(x_n)+ihy''(x_n)+\cdots+\frac{(ih)^p}{p!}y^{(p+1)}(x_n)+\frac{(ih)^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+2)}(\xi_2)$$

□

Uvedené požadavky ještě nestačí k tomu, aby daly rozumnou metodu.

Příklad 1.3. Zkonstruujeme explicitní formuli 2. řádu, co nejpřesnější:

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_1 y'_{n+1} + \beta_0 y'_n).$$

Z podmínek pro stupeň formule máme

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_1 + \alpha_0 &= 0 \\ 2 + \alpha_1 &= \beta_1 + \beta_2 \\ \frac{1}{2}(4 + \alpha_1) &= \beta_1 \\ \frac{1}{6}(8 + \alpha_1) &= \frac{1}{2}\beta_1. \end{aligned}$$

Víc podmínek si klást nelze, protože je u formule 2. řádu nelze splnit. Metoda má v jednom kroku přesnost $O(n^4)$. Řešení soustavy je $\alpha_1 = 4$, $\alpha_0 = -5$, $\beta_1 = 4$, $\beta_0 = 2$. Po dosazení

$$y_{n+2} = -4y_{n+1} + 5y_n + 4(4y'_{n+1} + 2y'_n).$$

Zkusíme řešit rovnici $y' = -y$, $y(0) = 1$. Víme, že řešení je $y(x) = e^{-x}$. Výše uvedená formule bude mít pro tuto rovnici tvar

$$y_{n+2} = -4(1 + h)y_{n+1} + (5 - 2h)y_n.$$

Zvolme krok $h = 0.1$, počáteční hodnotu $y_1 = e^{-0.1} \doteq 0.904837$. Dostaneme následující výsledky (IEEE Double, zaokrouhleno):

x	y_i	$(y_i - y(x_i)) \cdot 10^6$	y'_i	$(y'_i - y(x_i)) \cdot 10^6$
0.0	1.000000	0	1.000000	0
0.1	0.904837	0	0.904835	-2
0.2	0.818715	-15	0.818726	-4
0.3	0.740872	54	0.740812	-6
0.4	0.669997	-323	0.670313	-7
0.5	0.608200	1669	0.606522	-8
0.6	0.539907	-8905	0.548803	-9
0.7	0.543769	47183	0.496576	-10
0.8	0.198971	-250358	0.449319	-10
0.9	1.734618	1328048	0.406560	-10
1.0	-6.677259	-7045138	0.367869	-10
2.5			30.828821	30746736

Definice 1.8. Formule (5) se nazývá **stabilní podle Dahlquista**, jestliže všechny kořeny polynomu $\alpha_k \lambda^k + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + \alpha_0$ jsou v absolutní hodnotě menší nebo rovny 1 a ty, které jsou v absolutní hodnotě rovny 1, jsou jednoduché.

Lemma 1.1. Nechť $y(x)$ je řešení rovnice $y' = f(x, y)$ v intervalu $\langle x_0, a\rangle$, nechť f je definována, spojitá a lipschitzovská vzhledem k y s konstantou M na $\langle x_0, a\rangle \times \langle -\infty, +\infty\rangle$. Pak pro každé celé n: $0 \le n \le N$ označme $u_n = y(x_n) - \lambda f(x_n, y(x_n))$, kde λ je libovolně zvolená hodnota taková, že $|\lambda| M < 1$.

Rovnice $z - \lambda f(x_n, z) = \tilde{u}_n$ má jediné řešení $z = \tilde{y}_n$ a platí

$$|\tilde{y}_n - y_n| \le \frac{1}{1 - |\lambda| M} |\tilde{u}_n - u_n| .$$

Důkaz. Zavedeme zobrazení $F(z) = \lambda f(x_n, z) + \tilde{u}_n$ $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dokážeme, že $F(z)$ je kontrahující, tedy $F(z) = z$ má právě jedno řešení. Protože platí

$$|F(z) - F(y)| = |\lambda| |f(x, z) - f(x, y)| \le M |\lambda| |z - y|$$

a $M |\lambda| < 1$, je $F(x)$ kontrahující a výše uvedená rovnice má jediné řešení. Dále platí

$$|\tilde{y}_n - y_n| = |\lambda f(x_n, \tilde{y}_n) + \tilde{u}_n - \lambda f(x_n, y_n) - u_n| \le |\tilde{u}_n - u_n| + |\lambda| M |\tilde{y}_n - y_n| ,$$

z toho po úpravě

$$|\tilde{y}_n - y_n| \leq \frac{1}{1 - |\lambda| M} |\tilde{u}_n - u_n| .$$

□

Lemma 1.2. Nechť je dán polynom

$$\varrho(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i$$

a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_k} & -\frac{\alpha_0}{\alpha_k} & & & -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \end{pmatrix}.$$

Zřejmě $\varrho(t)$ je násobkem charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$. Nechť pro každý kořen t_i polynomu $\varrho(t)$ platí $|t_i| \leq 1$ a nechť ty kořeny, pro které $|t_i| = 1$, jsou jednoduché.

Zvolme nějakou maticovou normu. Pak existuje konstanta G, která závisí pouze na koeficientech $\varrho(t)$ tak, že platí $\|\mathbf{A}^n\| \leq G$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Jestliže pro všechny kořeny $\varrho(t)$ platí $|t_i| < 1$, pak existují konstanty G_1 a $0 < \gamma < 1$ tak, že $\|\mathbf{A}^n\| \leq G_1 \gamma^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. $\mathbf{A}$ je regulární, tudíž ji lze zapsat jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{T},$$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} J_1^n & & \\ & J_2^n & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{T}.$$

Pro maximovou normu platí $\|\mathbf{A}^n\|_{\mathrm{I}} \leq \left\|\mathbf{T}^{-1}\right\|_{\mathrm{I}} \tilde{G} \|\mathbf{T}\|_{\mathrm{I}} \leq \tilde{\tilde{G}}$, neboť vlastní čísla jsou buď menší než 1, v tom případě jsou prvky J_i^n k nule, vlastní číslo 1 může být pouze jednonásobné, v tom případě ale $J = (1)$, takže J_i^n jsou omezeny konstantou. Pro jiné normy to platí díky topologické ekvivalenci.

Je-li $\varrho(\mathbf{A}) < 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že i $\varrho(\mathbf{A}) + \varepsilon < 1$. Pak

$$\mathbf{A} = (\varrho(\mathbf{A}) + \varepsilon)\mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})+\varepsilon} J_1 & & \\ & \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})+\varepsilon} J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \frac{1}{\varrho(\mathbf{A}) + \varepsilon} T$$

a

$$\|\mathbf{A}^n\| \leq \left\|\mathbf{T}^{-1}\right\| \left\| \begin{matrix} \left(\frac{1}{\varrho(\mathbf{A})+\varepsilon} J_1\right)^n & & \\ & \left(\frac{1}{\varrho(\mathbf{A})+\varepsilon} J_2\right)^n & \\ & & \ddots \end{matrix} \right\| \|\mathbf{T}\| \, (\varrho(\mathbf{A}) + \varepsilon)^n.$$

□

Lemma 1.3. Nechť $\varphi_k, \psi_k, \chi_k$ jsou konečné posloupnosti čísel pro $k = 0, 1, \ldots, n$, $\chi_k \geq 0$. Nechť

$$\varphi_k \leq \psi_k + \sum_{i=0}^{k-1} \chi_i \varphi_i \quad \text{pro } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Potom platí

$$\varphi_n \leq \psi_n + \sum_{i=0}^{n-1} \chi_i \psi_i \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + \chi_j).$$

Důkaz. Zavedeme další posloupnost

$$\Phi_k = \psi_k + \sum_{i=0}^{k-1} \chi_i \Phi_i,$$

$\Phi_0 = \psi_0$. Indukcí dokážeme, že $\varphi_k \leq \Phi_k$. Pro $k = 0$ to z definice platí, pokud to platí až do $k-1$, je

$$\sum_{i=0}^{k-1} \chi_i \varphi_i \leq \sum_{i=0}^{k-1} \chi_i \Phi_i,$$

neboť $\chi_i \geq 0$, což bylo dokázat.

Dále dokážeme, že

$$\Phi_n = \psi_n + \sum_{i=0}^{n-1} \chi_i \psi_i \prod_{j=i+1}^{n-1} (1+\chi_j).$$

Pro $k = 0$ to opět z definice platí, předpokládejme platnost až do $k-1$. Z definice je

$$\begin{aligned}
\Phi_k &= \psi_k + \chi_0\Phi_0 + \chi_1\Phi_1 + \cdots + \chi_{k-1}\Phi_{k-1} = \\
&= \psi_k + \chi_0\psi_0 + \\
&\qquad + \chi_1[\psi_1 + \chi_0\psi_0] + \\
&\qquad + \chi_2[\psi_2 + \chi_0\psi_0(1+\chi_1) + \chi_1\psi_1] + \\
&\qquad + \chi_3[\psi_3 + \chi_0\psi_0(1+\chi_1)(1+\chi_2) + \chi_1\psi_1(1+\chi_2) + \chi_2\psi_2] + \\
&\qquad + \chi_4[\psi_4 + \chi_0\psi_0(1+\chi_1)(1+\chi_2)(1+\chi_3) + \chi_1\psi_1(1+\chi_2)(1+\chi_3) + \\
&\qquad\quad + \chi_2\psi_2(1+\chi_3) + \chi_3\varphi_3] + \\
&\qquad + \chi_{k-1}[\psi_{k-1} + \chi_0\psi_0(1+\chi_1)(1+\chi_2)\cdots(1+\chi_{k-1}) + \\
&\qquad\quad + \chi_1\psi_1(1+\chi_2)\cdots(1+\chi_{k-1}) + \cdots] = \\
&= \psi_k + \chi_0\psi_0[1 + \chi_1 + \chi_2(1+\chi_1) + \chi_3(1+\chi_1)(1+\chi_2) + \\
&\qquad\quad + \chi_4(1+\chi_1)(1+\chi_2)(1+\chi_3) + \cdots + \chi_0\psi_0(1+\chi_1)\cdots(1+\chi_{k-1})] = \cdots
\end{aligned}$$

Budeme vytýkat $(1+\chi_1)$, $(1+\chi_2)$ až $(1+\chi_{k-1})$. □

Věta 1.4. Nechť pravá strana diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ je definována a spojitá v intervalu $x_0 \leq x \leq a$, $-\infty < y < +\infty$ a splňuje vzhledem k y Lipschitzovu podmínku s konstantou M. Nechť $y(x)$ je řešení rovnice na intervalu $\langle x_0, a\rangle$ a nechť má spojité derivace do řádu $p+1$, kde $p \geq 1$. Nechť uvažovaná diferenční formule řádu k je stupně p a stabilní podle Dahlquista. Nechť $y_0, y_1, \ldots, y_n$ jsou hodnoty vypočítané podle vzorců

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) + \delta_n \text{ pro } n = 0, 1, \ldots, N-k$$

a y_i pro $i = 0, 1, \ldots, k-1$ je dáno. Pak (pro dostatečně malá h) platí

$$|y_n - y(x_n)| \leq \frac{G}{1 - |\lambda|\, M} \left[(1 + |\lambda|\, M)\vartheta + \frac{|x_n - x_0|}{|\alpha_n|}\left(\frac{\delta}{h} + Kh^p\right)\right] e^{G\tilde{M}(x_n - x_0)},$$

kde $n = 0, 1, \ldots, N$,

$$\vartheta = \max_{i=0,1,\ldots,k-1} |y_i - y(x_i)|\,, \quad \delta = \max_{i=0,1,\ldots,N-k} |\delta_i|\,, \quad \lambda = h\frac{\beta_k}{\alpha_k}$$

a $\tilde{G}$, $\tilde{M}$, K jsou konstanty, které závisí jen na koeficientech formule a na diferenciální rovnici a jsou nezávislé na h pro dostatečně malá h.

Důkaz. Označme $y_n - y(x_n) = r_n$. Odečtením vztahů

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) + \delta_n$$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_{n+i}) = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) - l_n,$$

přičemž $l_n \leq Kh^{p+1}$, dostaneme

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i r_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i [f(x_{n+i}, y_{n+i}) - f(x_{n+i}, y(x_{n+i}))] + \delta_n + l_n. \tag{6}$$

Označme $u_n = y(x_n) - \lambda f(x_n, y(x_n))$, $\tilde{u}_n = y_n - \lambda f(x_n, y_n)$. Podle lemmatu 1.1 se dá odhadnout

$$|r_n| \leq \frac{1}{1 - |\lambda| M} |\tilde{u}_n - u_n| .$$

Místo r_n budeme dále odhadovat $\tilde{u}_n - u_n$. Platí, že

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (\tilde{u}_{n+i} - u_{n+i}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i r_{n+i} - \lambda \sum_{i=0}^{k} \alpha_i [f(x_{n+i}, y_{n+i}) - f(x_{n+i}, y(x_{n+i}))] =$$

$$= h \sum_{i=0}^{k} (\beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \alpha_i)[f(x_{n+i}, y_{n+i}) - f(x_{n+i}, y(x_{n+i}))] + \delta_n + l_n = q_n.$$

Pro $i = k$ dostaneme $\beta_k - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \alpha_k = 0$, takže stačí sčítat od 0 do $k - 1$. Zavedeme vektory

$$\vec{u}^{(n)} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_n - u_n \\ \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n+k-1} - u_{n+k-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{q}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{q_n}{\alpha_k} \end{pmatrix}$$

a matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_k} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} & & \cdots & -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \end{pmatrix}.$$

Potom platí, že $\vec{u}^{(n+1)} = A\vec{u}^{(n)} + \vec{q}^{(n)}$. Až do $k-1$-té složky je to jasné, pro poslední složku to vyplývá z předchozí rovnosti.

Dále je

$$\vec{u}^{(n)} = \mathbf{A}\vec{u}^{(n-1)} + \vec{q}^{(n-1)} = \mathbf{A}^2\vec{u}^{(n-2)} + \mathbf{A}\vec{q}^{(n-2)} + \vec{q}^{(n-1)},$$

$$\vec{u}^{(n)} = \mathbf{A}^n \vec{u}^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i} \vec{q}^{(i)}.$$

Pomocí vektoru $\vec{u}^{(n)}$ provedeme odhad r_{n+i} nezávislý na i:

$$|r_{n+i}| \leq \frac{1}{1 - |\lambda| M} |\tilde{u}_{n+i} - u_{n+i}| \leq \frac{1}{1 - |\lambda| M} \left\| \vec{u}^{(n)} \right\|_{\mathrm{I}},$$

neboť pro $i = 0, \ldots, k-1$ jsou to složky $\vec{u}^{(n)}$.

$$\left\| \vec{q}^{(n)} \right\|_{\mathrm{I}} = \frac{1}{|\alpha_k|} |q_n| \leq \frac{Mh}{|\alpha_k|} \sum_{i=0}^{k-1} \left| \beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \alpha_i \right| |r_{n+i}| + \frac{1}{|\alpha_k|} \left(\delta + Kh^{p+1} \right) \leq$$

$$\leq h \underbrace{\left[\frac{M}{|\alpha_k|} \sum_{i=0}^{k-1} \left| \beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \alpha_i \right| \right] \frac{1}{1 - |\lambda| M}}_{\tilde{M}} \left\| \vec{u}^{(n)} \right\|_{\mathrm{I}} + \frac{1}{|\alpha_k|} (\delta + Kh^{p+1})$$

$$\left\| \vec{q}^{(n)} \right\|_{\mathrm{I}} \leq \tilde{M} h \left\| \vec{u}^{(n)} \right\|_{\mathrm{I}} + \frac{1}{\alpha_k} (\delta + Kh^{p+1})$$

Protože podle lemmatu 1.2 mají všechny mocniny $\mathbf{A}$ společný odhad G, platí

$$\left\|\vec{u}^{(n)}\right\|_{\mathrm{I}} \leq \|\mathbf{A}^n\|_{\mathrm{I}} \left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}} + \tilde{M}h \sum_{i=0}^{n-1} \left\|\mathbf{A}^{n-i-1}\right\|_{\mathrm{I}} \left\|\vec{u}^{(i)}\right\|_{\mathrm{I}} + \\ + \frac{\delta + Kh^{p+1}}{|\alpha_k|} \sum_{i=0}^{n-1} \left\|\mathbf{A}^{n-i-1}\right\|_{\mathrm{I}} \leq \\ \leq \underbrace{G\tilde{M}h}_{\chi_i} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left\|\vec{u}^{(i)}\right\|_{\mathrm{I}}}_{\varphi_i} + \underbrace{Gn\frac{\delta + Kh^{p+1}}{|\alpha_k|} + G\left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}}}_{\psi_n}.$$

Podle lemmatu 1.3 z toho, že platí

$$\varphi_k \leq \psi_k + \sum_{i=0}^{k-1} \chi_i \varphi_i,$$

vyplývá, že

$$\varphi_n \leq \psi_n + \sum_{i=0}^{n-1} \chi_i \psi_i \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + \chi_j)$$

$$\left\|\vec{u}^{(n)}\right\|_{\mathrm{I}} \leq G\tilde{M}h \sum_{i=0}^{n-1} \left[Gi\frac{\delta + Kh^{p+1}}{|\alpha_k|} + G\left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}}\right] (1 + G\tilde{M}h)^{n-i-1} + \\ + Gn\frac{\delta + Kh^{p+1}}{|\alpha_k|} + G\left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}}$$

$$\left\|\vec{u}^{(n)}\right\|_{\mathrm{I}} \leq G\left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}} \left[1 + G\tilde{M}h \sum_{i=0}^{n-1} (1 + G\tilde{M}h)^{n-i-1}\right] + \\ + \frac{\delta + Kh^{p+1}}{|\alpha_k|} \left[Gn + G\tilde{M}h \sum_{i=0}^{n-1} Gi(1 + G\tilde{M}h)^{n-i-1}\right]$$

Protože

$$\sum_{i=0}^{n-1} iq^{n-1-i} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{j-1} q^i,$$

je druhá hranatá závorka rovna

$$Gn + G\tilde{M}h \sum_{j=1}^{n-1} G\frac{(1 + G\tilde{M}h)^j - 1}{G\tilde{M}h} = Gn + G\sum_{j=1}^{n-1} (1 + G\tilde{M}h)^j - G(n-1) = \\ = G + G(1 + G\tilde{M}h)\frac{(1 + G\tilde{M}h)^{n-1} - 1}{G\tilde{M}h} = \frac{1}{\tilde{M}h}[(1 + G\tilde{M}h)^n - 1].$$

$$\left\|\vec{u}^{(n)}\right\|_{\mathrm{I}} \leq G\left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}} [1 + (1 + G\tilde{M}h)^n - 1] + \frac{\delta + Kh^{p+1}}{|\alpha_k|} \frac{1}{\tilde{M}h}[(1 + G\tilde{M}h)^n - 1],$$

to lze dále upravit:

$$\left\|\vec{u}^{(n)}\right\|_{\mathrm{I}} \leq G\left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}} (1 + G\tilde{M}h)^n + \frac{1}{|\alpha_k|\,\tilde{M}} \left(\frac{\delta}{h} + Kh^p\right) [(1 + G\tilde{M}h)^n - 1]$$

Využijeme nyní toho, že $1 + G\tilde{M}h < e^{G\tilde{M}h}$, tedy $(1 + G\tilde{M}h)^n < e^{nG\tilde{M}h} = e^{G\tilde{M}(x_n - x_0)}$ a dále $e^{G\tilde{M}(x_n - x_0)} - 1 < G\tilde{M}(x_n - x_0)e^{G\tilde{M}(x_n - x_0)}$. To první je jasné, to druhé vyplývá třeba z Taylorova rozvoje e^x.

$$\left\|\vec{u}^{(n)}\right\|_{\mathrm{I}} \leq G\left\|\vec{u}^{(0)}\right\|_{\mathrm{I}} e^{G\tilde{M}(x_n - x_0)} + \frac{G(x_n - x_0)}{|\alpha_k|} \left(\frac{\delta}{h} + Kh^p\right) e^{G\tilde{M}(x_n - x_0)}$$

Po vynásobení $1/(1 - |\lambda|\, M)$, dostáváme hledanou nerovnost. Stačí si uvědomit, že

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}_i - u_i| &= |y_i - y(x_i) - \lambda[f(x_i, y_i) - f(x_i, y(x_i))]| \leq \\
&= |y_i - y(x_i)| + |\lambda|\, M\, |y_i - y(x_i)| = (1 + |\lambda|\, M)\, |y_i - y(x_i)| = \\
&= (1 + |\lambda|\, M)\vartheta.
\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka 1.4. δ_n je zaokrouhlovací chyba počítače a ani počáteční podmínky nejsou dány přesně. Opět nelze jít s h libovolně nízko, pro další zvýšení přesnosti lze použít jedině metodu vyššího řádu.