1. Numerický výpočet integrálu

Chceme vypočítat

$$\int\limits_c^d f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

na základě znalosti $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, kde uzly $x_1,\ \ldots,\ x_n$ jsou z intervalu $\langle c,\ d\rangle$.

1.1. **Newtonovy-Cotesovy formule pro ekvidistantní rozmístění uzlů.** Podle rozmístění uzlů v intervalu $\langle c,\ d\rangle$ rozlišujeme

(1) formule uzavřeného typu:

$$\begin{array}{cccc} a & c & \ldots & d \\ \hline x_0 & x_1 & \ldots & x_n \end{array}$$

$$c = a + h,\ d = a + nh,\ h = \frac{d-c}{n-1},$$

(2) formule otevřeného typu:

$$\begin{array}{ccccc} a = c & a+h & \ldots & a+nh & d \\ \hline x_0 & x_1 & \ldots & x_n & x_{n+1} \end{array}$$

$$c = a,\ d = a + (n+1)h,\ h = \frac{d-c}{n+1}.$$

Odvozovat budeme oba typy najednou pomocí parametru k:

$$c = a + (1-k)h,\ d = a + (n+k)h,\ h = \frac{d-c}{n-1+2k}.$$

Formule uzavřeného, resp. otevřeného typu zřejmě získáme volbou $k = 0$, resp. $k = 1$. Definujme funkci $F(y) = f(a + hy)$. Potom $F(i) = f(x_i)$. Zavedeme-li do integrálu (1) substituci $x = a + hy$, je

$$\int\limits_c^d f(x)\ \mathrm{d}x = h \int\limits_{1-k}^{n+k} F(y)\ \mathrm{d}y.$$

Funkci F nahradíme Lagrangeovým interpolačním polynomem příslušným k této funkci a uzlům $1,\ \ldots,\ n$. Potom

$$\int\limits_c^d f(x)\ \mathrm{d}x = h \int\limits_{1-k}^{n+k} \sum_{i=1}^{n} F(i) \frac{(y-1)\ldots(y-(i-1))(y-(i+1))\ldots(y-n)}{(i-1)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1))\ldots(i-n)}\ \mathrm{d}y +$$

$$+ h \underbrace{\int\limits_{1-k}^{n+k} (y-1)\ldots(y-n)\ F(y,\ 1,\ \ldots,\ n)\ \mathrm{d}y}_{\text{ozn. } \varrho_n} =$$

$$= h \int\limits_{1-k}^{n+k} \sum_{i=1}^{n} \frac{F(i)}{(i-1)!\ (n-i)!\ (-1)^{i-n}} \frac{(y-1)\ldots(y-n)}{y-i}\ \mathrm{d}y + h\varrho_n =$$

$$= (d-c) \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underbrace{\frac{(-1)^{n-i} \int_{1-k}^{n+k} \frac{(y-1)\ldots(y-n)}{y-i}\ \mathrm{d}y}{(n-1+2k)(i-1)!\ (n-i)!}}_{\text{ozn. } I^{(n)}_{i,k}} + \underbrace{h\varrho_n}_{\text{ozn. } R_{n,k}(f)},$$

kde $I^{(n)}_{i,\ k}$ jsou tzv. Newtonova-Cotesova čísla. Získali jsme tedy obecný vzorec

$$\int\limits_c^d f(x)\ \mathrm{d}x = (d-c) \sum_{i=1}^{n} I^{(n)}_{i,\ k} f(x_i) + R_{n,\ k}(f). \tag{2}$$

Tvrzení 1.1. Newtonova-Cotesova čísla $I_{i,k}^{(n)}$ jsou symetrická v i, tj. $(\forall i \in \hat{n})(I_{i,\,k}^{(n)} = I_{n+1-i,\,k}^{(n)})$, a pro jejich součet platí

$$\sum_{i=1}^{n} I_{i,\,k}^{(n)} = 1.$$

Důkaz. První část tvrzení: Platí

$$I_{n+1-i,\,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{i-1}}{(n-1+2k)(n-i)!\,(i-1)!} \int\limits_{1-k}^{n+k} \frac{(y-1)\dots(y-n)}{y-n+i-1}\,\mathrm{d}y.$$

Do integrálu vpravo zavedeme substituci $z = n+1-y$, tj. $y = n+1-z$:

$$I_{n+1-i,\,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{1-i}}{(n-1+2k)(i-1)!\,(n-i)!} \int\limits_{n+k}^{1-k} \frac{(n-z)\dots(1-z)}{i-z}(-\mathrm{d}z) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k)(i-1)!\,(n-i)!} \int\limits_{1-k}^{n+k} \frac{(z-1)\dots(z-n)}{z-i}\,\mathrm{d}z = I_{i,\,k}^{(n)}.$$

Druhá část tvrzení: Položíme-li $f(x) \equiv 1$, potom zřejmě $R_{n,\,k}(f) = 0$ a podle (2) platí $d-c = (d-c)\sum_{i=1}^{n} I_{i,\,k}^{(n)}$. □

Nyní do vzorce (2) dosadíme $k=0$ a $n=2$. Podle předchozího tvrzení musí být $I_{1,0}^{(2)} = I_{2,0}^{(2)}$, takže

$$\int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \approx (d-c)\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right).$$

Pro $n=3$ si už musíme alespoň $I_{1,0}^{(3)}$ spočítat podle definice:

$$I_{1,0}^{(3)} = \frac{1}{2.0!\,2!} \int\limits_1^3 \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{y-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

$$\int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \approx (d-c)\left(\frac{1}{6}f(x_1) + \frac{4}{6}f(x_2) + \frac{1}{6}f(x_3)\right).$$

Podobným způsobem se dozvíme, že pro $n=4$ platí

$$\int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \approx (d-c)\left(\frac{1}{8}f(x_1) + \frac{3}{8}f(x_2) + \frac{3}{8}f(x_3) + \frac{1}{8}f(x_4)\right).$$

Analogicky dokážeme, že v případě formulí otevřeného typu (tj. pro $k=1$) platí

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \approx (d-c)f(x_1),$$

$$n=2 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \approx (d-c)\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right),$$

$$n=3 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \approx (d-c)\left(\frac{2}{3}f(x_1) - \frac{1}{3}f(x_2) + \frac{2}{3}f(x_3)\right).$$

1.2. **Určení chyby v Newtonových-Cotesových formulích.**

1.2.1. *Lichý počet uzlů.* Soustřeďme se nejprve na případ lichého počtu uzlů, tj. nechť $(\exists m \in \mathbb{N})(n = 2m-1)$. Potom pro chybu platí

$$\varrho_{2m-1} = \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \underbrace{(y-1)\dots(y-2m+1)}_{\text{ozn. } \psi(y)} F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)\ \mathrm{d}y.$$

Definujme funkci

$$\varphi(x) = \int\limits_{1-k}^{x} \psi(y)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Tvrzení 1.2 (pomocné)**.** Označme

$$I_i = \int\limits_{i}^{i+1} \psi(y)\ \mathrm{d}y$$

pro $i = 0,\, 1,\, \dots,\, m-1$. Potom platí $|I_0| > |I_1| > \dots > |I_{m-1}|$.

Důkaz. Pro $i \le m-2$ je $I_{i+1} = \int_{i+1}^{i+2} (y-1)\dots(y-2m+1)\ \mathrm{d}y$. Do tohoto integrálu zavedeme substituci $z = y-1$, tj. $y = z+1$:

$$I_{i+1} = \int\limits_{i}^{i+1} z(z-1)\dots(z-2m+2)\ \mathrm{d}z = \int\limits_{i}^{i+1} z \cdot \frac{\psi(z)}{z-2m+1}\ \mathrm{d}z.$$

Protože funkce $z \to \frac{z}{z-2m+1}$ je v intervalu $\langle i,\, i+1\rangle$ zřejmě spojitá a funkce ψ nemění v intervalu $(i,\, i+1)$ znamení (je to polynom a body $i,\, i+1$ jsou jeho jediné kořeny v $\langle i,\, i+1\rangle$), existuje podle 1. věty o střední hodnotě takové $\xi \in (i,\, i+1)$, že

$$I_{i+1} = \frac{\xi}{\xi-2m+1} \int\limits_{i}^{i+1} \psi(z)\ \mathrm{d}z = \frac{\xi}{\xi-2m+1} I_i.$$

Zřejmě platí $\left|\frac{\xi}{\xi-2m+1}\right| = \frac{\xi}{2m-1-\xi}$ a tato funkce proměnné ξ je v celém intervalu $\langle 0,\, m-1\rangle$ ostře rostoucí. Proto $\forall i \in \{0,\, \dots,\, m-2\}$ platí

$$|I_{i+1}| = \frac{\xi}{2m-1-\xi}\, |I_i| \le \frac{m-1}{m}\, |I_i| < |I_i|\, .$$

□

Tvrzení 1.3 (pomocné)**.** Platí $\psi(y) = -\psi(2m-y)$.

Důkaz. Je $\psi(2m-y) = (2m-1-y)\dots(1-y) = -(y-1)\dots(y-2m+1)$. □

Tvrzení 1.4. (1) Funkce φ je polynom,
(2) $\varphi(1-k) = 0$,
(3) $\varphi(2m-1+k) = 0$,
(4) $(\forall x \in (1-k,\, 2m-1+k))(\varphi(x) \neq 0)$.

Důkaz. (1) Zřejmé.
(2) Zřejmé.
(3) Podle (3) je

$$\varphi(2m-1+k) = \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} (y-1)\dots(y-2m+1)\ \mathrm{d}y.$$

Zavedeme substituci $z = 2m-y$, tj. $y = 2m-z$:

$$\varphi(2m-1+k) = \int\limits_{2m-1+k}^{1-k} (2m-1-z)\dots(1-z)(-\mathrm{d}z) =$$

$$= -\int\limits_{1-k}^{2m-1+k} (z-1)\dots(z-2m+1)\ \mathrm{d}z = -\varphi(2m-1+k).$$

Protože $\varphi(2m-1+k) = -\varphi(2m-1+k)$, musí být $\varphi(2m-1+k) = 0$.

(4) Z důkazu tvrzení 1.2 vyplývá, že funkce φ nemění v intervalu $\langle i,\, i+1\rangle$ znamení a že $\operatorname{sgn} I_i = -\operatorname{sgn} I_{i+1}$ $(i \in \{0,\, \dots,\, m-2\})$. Odtud je zřejmé, že $(\forall x \in (1-k,\, m\rangle)(\operatorname{sgn} \varphi(x) = \operatorname{sgn} I_0)$.

Dokážeme, že pro $x \in \langle m,\, 2m-1+k)$ platí $\varphi(x) = \varphi(2m-x)$: Do integrálu

$$\varphi(2m-x) = \int\limits_{1-k}^{2m-x} \psi(y)\mathrm{d}y$$

zavedeme substituci $z = 2m-y$, takže s využitím tvrzení 1.3 a již dokázaného bodu 3 dostaneme

$$\varphi(2m-x) = -\int\limits_{2m-1+k}^{x} \psi(2m-z)\ \mathrm{d}z = \int\limits_{2m-1+k}^{x} \psi(z)\ \mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{2m-1+k}^{1-k} \psi(z)\ \mathrm{d}z + \int\limits_{1-k}^{x} \psi(z)\ \mathrm{d}z = -\varphi(2m-1+k) + \varphi(x) = \varphi(x).$$

□

Nyní již můžeme určit chybu ϱ_{2m-1}. K tomu využijeme metody per partes:

$$\varrho_{2m-1} = \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \psi(y)F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)\ \mathrm{d}y =$$

$$= [\varphi(x)F(x,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)]_{1-k}^{2m-1+k} - \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)\ \mathrm{d}y.$$

Podle bodů 2 a 3 tvrzení 1.4 je první sčítanec nulový, do druhého dosadíme z (**??**), takže

$$\int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \psi(y)F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)\ \mathrm{d}y = -\int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)F(y,\, y,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)\ \mathrm{d}y.$$

Z tvrzení **??** vyplývá spojitost funkce $y \to F(y,\, y,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)$ a podle tvrzení 1.4 funkce φ nemění na $(k-1,\, 2m-1+k)$ znamení. Podle 1. věty o střední hodnotě proto existuje $\eta \in (1-k,\, 2m-1+k)$ tak, že

$$\varrho_{2m-1} = -F(\eta,\, \eta,\, 1,\, \dots,\, 2m-1) \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\ \mathrm{d}y = -\frac{F^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\ \mathrm{d}y.$$

1.2.2. *Sudý počet uzlů.* Nyní si rozeberme případ sudého počtu uzlů, tj. nechť $(\exists m \in \mathbb{N})(n = 2m)$. Potom

$$\varrho_{2m} = \int\limits_{1-k}^{2m+k} (y-1)\dots(y-2m)F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \psi(y)(y-2m)F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{2m-1+k}^{2m} (y-1)\dots(y-2m)F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m)\ \mathrm{d}y.$$

Označme poslední dva integrály po řadě S_1, S_2. Do prvního integrálu dosadíme

$$F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m) = \frac{F(1,\, \dots,\, 2m) - F(y,\, 1,\, \dots,\, 2m-1)}{2m-y},$$

takže dostaneme

$$S_1 = -F(1,\ \dots,\ 2m) \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \psi(y)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \psi(y) F(y,\ 1,\ \dots,\ 2m-1)\ \mathrm{d}y =$$

$$= -F(1,\ \dots,\ 2m) \underbrace{\varphi(2m-1+k)}_{=0} + \varrho_{2m-1} = \frac{F^{(2m)}(\xi_1)}{(2m)!} \underbrace{\left(- \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\ \mathrm{d}y \right)}_{\text{ozn. } A_1}.$$

Na druhý integrál použijeme oblíbenou 1. větu o střední hodnotě a máme

$$S_2 = \int\limits_{2m-1+k}^{2m} (y-1)\dots(y-2m) F(y,\ 1,\ \dots,\ 2m)\ \mathrm{d}y =$$

$$= F(\eta,\ 1,\ \dots,\ 2m) \underbrace{\int\limits_{2m-1+k}^{2m+k} (y-1)\dots(y-2m)\ \mathrm{d}y}_{\text{ozn. } A_2} = \frac{F^{(2m)}(\xi_2)}{(2m)!} A_2.$$

Tvrzení 1.5. Platí sgn $A_1 = \operatorname{sgn} A_2$.

Důkaz. Nechť např. $k = 0$ (případ $k = 1$ se dokáže podobně). Potom

$$A_1 = -\int\limits_1^{2m-1} \varphi(y)\ \mathrm{d}y, \qquad \text{kde} \qquad \varphi(y) = \int\limits_1^y (t-1)\dots(t-2m+1)\ \mathrm{d}t.$$

Podle tvrzení 1.4 nemění funkce φ na $(1,\ 2m-1)$ znamení, a proto stačí zjistit sgn φ v libovolném bodě tohoto intervalu, např. v bodě $y = 2$:

$$\varphi(2) = \int\limits_1^2 \underbrace{(t-1)}_{>0} \underbrace{(t-2)}_{<0} \dots \underbrace{(t-2m+1)}_{<0}\ \mathrm{d}t > 0,$$

takže A_1 je záporně vzatým integrálem kladné funkce, odkud $A_1 < 0$. Pro A_2 platí

$$A_2 = \int\limits_{2m-1}^{2m} \underbrace{(y-1)\dots(y-(2m-1))}_{>0} \underbrace{(y-2m)}_{<0}\ \mathrm{d}y < 0.$$

□

Lemma 1.6. Jsou-li φ funkce spojitá v intervalu $\langle x_1,\ x_2\rangle$ a A_1, A_2 konstanty buď obě kladné, nebo obě záporné, potom

$$(\exists \xi \in \langle x_1,\ x_2\rangle)(A_1\varphi(x_1) + A_2\varphi(x_2) = (A_1 + A_2)\varphi(\xi)).$$

Důkaz. $\emptyset$ □

Platí

$$\varrho_{2m} = S_1 + S_2 = \frac{F^{(2m)}(\xi_1)}{(2m)!} A_1 + \frac{F^{(2m)}(\xi_2)}{(2m)!} A_2.$$

Předpokládejme, že $F^{(2m)}$ je spojitá funkce. Potom podle předchozí lemmy existuje $\xi \in \langle \xi_1,\ \xi_2\rangle$ tak, že

$$\varrho_{2m} = \frac{F^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \left(-\int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\ \mathrm{d}y + \int\limits_{2m+1-k}^{2m+k} (y-1)\dots(y-2m)\ \mathrm{d}y \right).$$

1.2.3. *Shrnutí.*

Tvrzení 1.7. Platí $F^{(n)}(y) = h^n f^{(n)}(x)$.

Důkaz. Na začátku kapitoly jsme zavedli funkci $F(y) = f(a + hy)$ a provedli substituci $x = a + hy$. Odtud plyne

$$\frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},$$

tj. $F'(y) = hf'(a + hy)$ a indukcí pak $\frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}y^n}(y) = h^n \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$. □

Obecné vzorce pro numerický výpočet integrálu tedy jsou:

$$\int\limits_c^d f(x)\ \mathrm{d}x = (d-c)\sum_{i=1}^{2m-1} I_{i,\ k}^{(2m-1)} f(x_i) - \frac{h^{2m+1}}{(2m)!}\ f^{(2m)}(\xi) \int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\ \mathrm{d}y$$

pro lichá n, tj. $n = 2m - 1$, a

$$\int\limits_c^d f(x)\ \mathrm{d}x = (d-c)\sum_{i=1}^{2m} I_{i,\ k}^{(2m)} f(x_i) -$$

$$-\frac{h^{2m+1}}{(2m)!}\ f^{(2m)}(\xi) \left(\int\limits_{1-k}^{2m-1+k} \varphi(y)\ \mathrm{d}y - \int\limits_{2m-1+k}^{2m+k} (y-1)\dots(y-2m)\ \mathrm{d}y \right)$$

pro sudá n, tj. $n = 2m$.

Závěr: Výhodnější je formule pro lichý počet uzlů, protože mocnina h je stejná, ale počet sčítanců je menší. Navíc koeficient u h je v případě sudého počtu uzlů větší, jak víme z předchozí lemmy.

1.3. **Formule používané v praxi.** K praktickému výpočtu $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ se nepoužívají Newtonovy-Cotesovy formule, ale obdélníková, lichoběžníková a Simpsonova formule.

1.3.1. *Obdélníková formule.* Interval $\langle a,\, b\rangle$ rozdělíme na n dílků stejné délky a doprostřed každého dílku umístíme uzel $x_i = a + (i - \frac{1}{2})h$, kde $h = \frac{b-a}{n}$, $i \in \hat{n}$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Jednotlivé integrály vypočteme pomocí Newtonových-Cotesových formulí pro $k = n = m = 1$ (otevřený typ):

$$\int\limits_{\Delta_i} f(x)\ \mathrm{d}x = hf(x_i) - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi) \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^y (t-1)\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = hf(x_i) + \frac{h^3}{24} f''(\xi_i).$$

Odtud

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{h^3}{24}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}.$$

Poslední zlomek je aritmetickým průměrem hodnot $f''(\xi_i)$, označme jej proto $f''(\xi)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi).$$

1.3.2. *Lichoběžníková formule.* Interval $\langle a,\, b\rangle$ rozdělíme na n dílků stejné délky a do jejich hraničních bodů umístíme uzly $x_i = x_0 + ih$, kde $h = \frac{b-a}{n}$, $i \in \hat{n}_0$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Jednotlivé integrály vypočteme pomocí Newtonových-Cotesových formulí pro $k = 0$, $n = 2$, $m = 1$ (uzavřený typ):

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i) =$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] - h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)}{n}.$$

Za předpokladu spojitosti f'' je poslední zlomek opět aritmetickým průměrem, takže můžeme psát

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi).$$

Poznámka. Chyba zde vyšla větší než u obdélníkové formule. Je to tím, že zde jsme použili Newtonovy-Cotesovy formule pro sudé n.

1.3.3. *Simpsonova formule.* Interval $\langle a,\, b\rangle$ rozdělíme na $2n$ dílků stejné délky a uzly $x_i = x_0 + ih$, kde $h = \frac{b-a}{2n}$, $i \in \{0,\ \ldots,\ 2n\}$ umístíme do prostředního i obou hraničních bodů každého dílku. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Jednotlivé integrály vypočteme pomocí Newtonových-Cotesových formulí pro $k = 0$, $n = 3$, $m = 2$ (uzavřený typ):

$$\int\limits_{2i-2}^{2i} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2h}{6}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots +$$

$$+2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] - \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i).$$

V posledním výrazu dosadíme za $h = \frac{b-a}{2n}$ a za předpokladu spojitosti $f^{(4)}$ můžeme psát

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots +$$

$$+2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).$$

Poznámka (závěrečná). Numerická matematika II není doslovným přepisem zápisků z přednášky. Důvodem byla snaha o přehlednější a ucelenější pojetí, které by navíc zdůraznilo styčné body s lineární algebrou a matematickou analýzou. Výsledkem by mělo být snažší pochopení látky. Co je tedy jinak?

Něco je zde navíc a něco jiného chybí. Přidáno bylo několik poznámek, které upozorňují na souvislosti s jinými předměty, zejména s matematickou analýzou 3. Tyto poznámky slouží pouze ke zdůraznění souvislostí a ke snazšímu pochopení. Jsou samozřejmě zcela mimo rámec toho, co je třeba se učit ke zkoušce, a ten, koho by mátly, nebo kdo ještě neabsolvoval MAA3, je může klidně vynechat.

Co zde naopak nenajdete: Snahou bylo odstranit vše, co se nevyžaduje u zkoušky a přitom není podstatné pro pochopení další látky. Přesto zde zůstalo i několik takovýchto věcí, např. popis metody řízené relaxace.

Za zmínku stojí ještě dvě úpravy: Většina nových pojmů je uváděna až ve chvíli, kdy jsou tyto pojmy potřeba. Pozornému čtenáři skript jistě neuniklo, že dílčí snahy v tomto směru se objevují i v samotné přednášce. Tento projekt v nich tedy pouze jde o trochu dál.

Poslední a vlastně nejzásadnější změnou oproti přednášce je forma, jakou je veden výklad v jednotlivých kapitolách. Na přednášce je postup většinou takový, že se odvozuje ,,pořád dál", tj. bez průběžných shrnutí získaných výsledků. Naproti tomu zde je zvolena ,,klasičtější"forma tvrzení-důkaz. Velká část odvození je tak ,,skryta"do důkazů jistých tvrzení. To by mělo mít za následek větší přehlednost a srozumitelnost. Aby se tato tvrzení odlišila od vět, resp. lemm vyslovených na přednášce přímo (a tedy i v téže podobě vyžadovaných u zkoušky), jsou v textu označována slovem tvrzení. Pojmenování věta, resp. lemma jsou vyhrazena tvrzením takto označeným na přednášce. Upozornění: Přidaná tvrzení velmi často nejsou exaktní, tj. zejména neobsahují všechny potřebné předpoklady, pokud jsou zřejmé z kontextu. Je tomu tak především proto, aby nedošlo k příliš výraznému odklonu od přednášky. Stručně řečeno: cílem není naprostá přesnost ve všech detailech za cenu vytvoření něčeho, co nemá s přednáškou mnoho společného, ale spíš naopak — jednoduchost a zachování původního pojetí i za cenu drobných nepřesností.