1. Funkce komplexní proměnné

Poznámka 1.1. Bude se nám hodit Eulerova formule

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Poznámka 1.2.

Příklad 1.1. *Ukázka komplexního logaritmu:*

$$\ln(\sqrt{3}+i) = \ln_0(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i \arg_0(\sqrt{3}+i).$$

Snadno nahlédneme, že

$$\arg_0(\sqrt{3}+i) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

A

$$\ln(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{6}.$$

Poznámka 1.3. Některé elementární funkce komplexní proměnné:

- polynomy: $\sum_{i=0}^{p} x_i z^i$,
- exponenciála: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,
- sinus: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,
- cosinus: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

Příklad 1.2. *Řešte*

$$\cos z = 2,$$

v $\mathbb{C}$.

Poznámka 1.4. O diferencovatelnosti $f(z)$. Problém můžeme formulovat následovně

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \ z = x + iy,$$

$$f(x) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Platí tzv. Riemann-Cauchyho podmínky :
$f'(z_0)$ existuje, právě když platí

(i)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

(ii)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

A dále platí, že

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0, y_0).$$

Příklad 1.3. *Má následující funkce derivaci?*

$$f(z) = y + ix$$

Příklad 1.4. *Má funkce*

$$f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

derivaci?

1.1. **Křivkový integrál v $\mathbb{C}$.**

Poznámka 1.5. Křivkový integrál 1. druhu (málo používaný)

$$\int_C f(z)|\,\mathrm{d}z| = \int_C u(x,y)\mathrm{d}l + i\int_C v(x,y)\mathrm{d}l,$$

zřejmě

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Křivkový integrál 2. druhu (C je orientovaná)

$$\int_v f(z)\ \mathrm{d}z = \int_C (u(x,y)\ \mathrm{d}x - v(x,y)\ \mathrm{d}y) + i\int_C (v(x,y)\ \mathrm{d}x + u(x,y)\ \mathrm{d}x).$$

Opět definován pomocí reálného křivkového integrálu 2. druhu.

Definice 1.1. (Holomorfní funkce) Funkce f je na $A \subset \mathbb{C}$ holomorfní právě když $(\forall z \in A)(f'(z)$ existuje).

Věta 1.1. (Cauchyho integrální věta) f je holomorfní na $A \subset \mathbb{C}$, $A = A^{\circ}$, $C \subset A$ křivka se stopou v A právě když integrál

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$$

nezávisí na cestě integrace.

Poznámka 1.6. Je-li C uzavřená a f holomorfní pak $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = 0$.

Poznámka 1.7. (Newtonova formule) Nechť f je holomrofní na A, $z_0, z_1 \in A$ pak

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\ \mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0),$$

kde $F'(z) = f(z)$.

Příklad 1.5. *Výpočet křivkového integrálu $\int_C z\ \mathrm{d}z$, kde $C:\ \varphi(t) = t + 2it$, $t \in < 0, 1 >$.*

máme

$$u(x,y) = x, v(x,y) = -y,$$

$$\varphi_Re(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix},\ \dot{\varphi_R}e(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Takže náš integrál

$$I = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + i\int_0^1 \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 5t\mathrm{d}t + i\int_0^1 0\mathrm{d}t = \frac{5}{2}.$$

Příklad 1.6. *Spočtěte integrál*

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z,\ \ f(z) = y + 1 - ix,$$

pomocí Newtonovy formule.

Vidíme, že

$$f(z) = 1 - iz,$$

a primitivní funkce

$$F(z) = C + z - \frac{i}{2}z^2.$$

Newtonova formule 1.7 nám pak dává

$$I = F(-i) - F(1) = -1.$$

Příklad 1.7. *Spočtěte integrál*

$$\int\limits_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a}, \ a \in \mathbb{C},$$

kde C je uzavřená, kladně orientovaná, po částech hladká křivka a $a \notin [C]$.

Vidíme, že

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

je holomorfní na $A \subset \mathbb{C}$, $a \notin A$.

Rozebereme dva případy, které mohou nastat.

1) $a \in \operatorname{Ext} C$: Tedy a je vně C, pak je f na A holomorfní a

$$\int\limits_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 0.$$

2) $a \in \operatorname{Int} C$: Nenajdeme vhodnou A, kde bychom mohli použít Cauchyho integrální větu 1.1.

Poznámka 1.8. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

má primitivní funkci

$$\ln_\Theta(z-a)$$

na libovolné množině A takové, že $P_\Theta$not $\subset A$ (záporná polopřímka).

Dále k příkladu...