1. Záměna proměnných

Definice 1.1. (Regulární zobrazení) Zobrazení $f : (\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ se nazývá regulární, právě když platí

(i) $(\mathrm{def}\, f) = (\mathrm{def}\, f)^{\circ}$,
(ii) $f \in C^{(1)}(\mathrm{def}\, f)$,
(iii) $(\forall x \in \mathrm{def}\, f)(f'(x)$ je regulární $)$.

Poznámka 1.1. Regulární zobrazení je lokálně invertovatelné (jsou pro něj splněny požadavky Věty o inverzi **??**). To znamená, že regulární zobrazení je lokálně prosté,

$$f, f' \in C^{(1)}.$$

Regulární zobrazení je též difeomorfismem.

1.1. Klasifikace záměn proměnných.

V následujících odstavcích probereme záměny proměnných v obyčejných i parciálních diferenciálních výrazech.

1.2. Záměna proměnných v obyčejných diferenciálních výrazech.

Nechť $y = y(x)$ je funkce $(y : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R})$. Pod obyčejným diferenciálním výrazem myslíme výrazy typu

$$F = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m)}(x)),\ m \geq 1.$$

Záměnou proměnných přecházíme od starých proměnných x, y k novým t a u.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

Což můžeme vystihnout pomocí zobrazení

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix},$$

kde Ψ je regulární, tedy matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^1}{\partial x} & \frac{\partial \Psi^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi^2}{\partial x} & \frac{\partial \Psi^2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je regulární.

Poznámka 1.2. V záměně popsané výše považujeme staré x a nové t za nezávislé proměnné. Naopak y a u za závislé, a tedy

$$y = y(x),$$
$$u = u(t).$$

Pro přehled všech možností, které probereme, následuje malé schámátko

I. Záměna nezávislých proměnných
   a) Staré pomocí nových
   b) Nové pomocí starých
   c) Implicitně $\Phi(t, x) = 0$
II. Záměna závislých a nezávislých proměnných
   a) Staré pomocí nových
   b) Nové pomocí starých
   c) Implicitně $\Phi(t, u, x, y) = 0$

1.3. I. Záměna nezávislých proměnných.

Zobrazení Ψ v tomto případě vypadá takto

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^1(x) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}.$$

1.3.1. *I. a) Staré pomocí nových.* Máme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u \end{pmatrix} = \Psi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix},$$
$$x = \varphi(t).$$

φ musí být dostatečně diferencovatelné ($\varphi \in C^{(m)}$) vzhledem k povaze F. Zároveň je Φ regulární, neboť $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Nyní sestavíme tzv. ZÁKLADNÍ IDENTITU, která nám pomůže vyjádřit neznámé. V tomto případě má tvar

$$u(t) = y(\varphi(t)).$$

Tento vztah derivujeme podle t a získáme [1]

$$\dot{u}(t) = y'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \;\Rightarrow\; y'(\varphi(t)) = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)} \dot{u}(t). \tag{1.1}$$

Pokud chceme derivace vyššího řádu, nic nám nebrání derivovat identitu dál.

$$y''(\varphi(t)) = \frac{\dot{u}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^2} - \frac{\dot{u}(t)\ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3} \quad \text{atd.} \tag{1.2}$$

Dále můžeme využít operátorového zápisu. Vyjdeme ze vztahu pro první derivaci (1.2). Operátorově se to dá přepsat následovně

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Rekurzivně zapíšeme derivaci k-tého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\Big).$$

Pro náš případ druhé derivace v rovnici (1.2) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{1}{\dot{\varphi}^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

což souhlasí.

1.3.2. *I. b) Nové pomocí starých.* V tomto případě zaměňujeme

$$t = \alpha(x),\; \alpha \in C^{(m)}, \alpha' \neq \Theta.$$

Sestrojíme základní identitu

$$y(x) = u(\alpha(x)).$$

Odtud snadno dostáváme derivace

$$y'(x) = \dot{u}(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$
$$y''(x) = \ddot{u}(\alpha(x)) \cdot (\alpha'(x))^2 + \dot{u}(\alpha(x)) \cdot \alpha''(x).$$

Operátorové zápisy jsou již patrny z výše uvedených derivací.

[1] Pozor! $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

1.3.3. *I. c) Implicitně* $\Phi(t,x)=0$. V tomto případě požadujeme $\partial_x\Phi$, $BPt\Phi \neq 0$.

Případ **I. a)** dostaneme volbou $x=\varphi(t)$, pak máme $\Phi(t,\varphi(t))=0$ odkud derivací získáme

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial_t\Phi}{\partial_x\Phi}.$$

Druhou záměnu v **I. b)** dostaneme, pokud $t=\alpha(x)$, a tedy $\Phi(\alpha(x),x)=0$. Odkud již snadno

$$\alpha'(x) = -\frac{\partial_x\Phi}{\partial_t\Phi}.$$

Poznámka 1.3. Celkem jsme převedli $F(x,y,y',\ldots)$ na cosi jako $\widetilde{F}(t,u,\dot{u},\ldots)$.

Příklad 1.1. *Ve výrazu*

$$F(x,y,y',y'') = x^2y''+xy'+y,$$

kde $x\in(0,+\infty)$ *a* $y\in C^{(2)}$, *proveďte záměnu* $x=e^t$.

Příklad 1.2. *Proveďte Keplerovu transformaci výrazu*

$$F(x,y,y',y'') = y''-y'\frac{\epsilon\sin x}{1-\epsilon\cos x}-y(1-\epsilon\cos x)^2,$$

kde $\epsilon\in(0,1)$, $x\in\mathbb{R}$ *a* $y\in C^{(2)}$. *A*

$$t = x-\epsilon\sin x.$$

1.4. **II. Záměna závislých a nezávislých proměnných.**

1.4.1. ***II. a)*** *Staré pomocí nových.* Narozdíl od předešlých případů máme pro záměnu

$$x=\varphi(t,u) \qquad \text{staré: } y=y(x),$$
$$y=\psi(t,u) \qquad \text{nové: } u=u(t).$$

Pro další postup předpokládáme, že $\varphi,\psi\in C^{(n)}$, regulární. Sestrojme základní identitu

$$\psi(t,u) = y(\varphi(t,u)).$$

Naší oblíbenou činností [2] vyjádříme

$$y' = (\partial_t\psi+\partial_u\psi\cdot\dot{u})(\partial_t\varphi+\partial_u\varphi\cdot\dot{u})^{-1}.$$

Další derivací bychom dostali výrazy pro vyšší řády.

1.4.2. ***II. b)*** *Nové pomocí starých.* Nyní platí

$$t=\alpha(x,y), \quad u=\beta(x,y),$$

kde $\alpha,\beta\in C^{(n)}$, regulární. Základní identita

$$\beta(x,y) = u(\alpha(x,y))$$

dává po derivaci podle x

$$y' = \frac{\dot{u}\cdot\partial_x\alpha-\partial_x\beta}{\partial_y\beta-\dot{u}\partial_y\alpha}.$$

[2] Derivováním podle t

1.4.3. ***III. c)*** *Implicitně.*

Příklad 1.3. *V rovnici*

$$(1-x^2)^2 y'' = -y$$

proveďte substituci

$$x = \tanh t,$$
$$y = \frac{u}{\cosh t}$$

a uvidíte.

Příklad 1.4. *V Stokesově rovnici*

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$$

proveďte záměnu

$$u = \frac{y}{x-b},$$
$$t = \ln\frac{x-a}{x-b}.$$

1.5. **Záměna proměnných v parciálních diferenciálních výrazech.** Označme

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

a tzv. multiindex

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Jeho délka je rovna

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Parciální derivace jistho řádu se pak dá zapsat jako

$$D_Z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} Z}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Parciální difierenciální výraz m-tého řádu je výraz typu

$$F = F(x_1, \dots, x_n, z, \{D_Z^\alpha \big| \ |\alpha| \geq m\}).$$

V dalším textu se omezíme na funkci dvou proměnných $z = z(x, y)$. Analogicky záměnnám v obyčejných diferenciálních výrazech budeme studovat jisté případy.

1.6. **I. Záměna nezávislých proměnných.**

Poznámka 1.4. Obecná záměna se provadí opět pomocí jistého zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{\Psi}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

kde Ψ je regulární.

Nyní v situaci I. platí, že $z = w$.

1.6.1. ***I. a)*** *Staré pomocí nových.* Máme

$$x = \varphi(u, v), y \qquad\qquad = \psi(u, v)$$

a

$$\Psi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ w \end{pmatrix}.$$

Základní identita má tvar

$$z(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = w(u, v).$$

Odtud (po trochu složitějším derivování podle u a v) dostaneme

$$\partial_x z = A(u, v)\partial_u w + B(u, v)\partial_v w,$$
$$\partial_y z = C(u, v)\partial_u w + D(u, v)\partial_v w,$$

nebo operátorově

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix}.$$

1.6.2. ***I. b)*** *Nové pomocí starých.* V tomto případě jsou

$$u = \alpha(x, y)$$
$$v = \beta(x, y)$$
$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \\ z \end{pmatrix}.$$

Napišme si základní identitu

$$z(x, y) = w(\alpha(x, y), \beta(x, y).$$

Odtud již snadno derivací podle x a y vyjádříme hledané derivace.

1.6.3. ***I. c)*** *Implicitní funkce.*

Příklad 1.5. *Ve výrazu*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

proveďte Galileiho transformaci

$$u = x - ct,$$
$$v = x + ct.$$

Příklad 1.6. *Proveďte záměnu*

$$x = u,$$
$$y = wv,$$

ve výrazu

$$x\partial_x z + y\partial_y z = z.$$

1.7. **II. Záměna nezávislých i závislých proměnných.**

1.7.1. ***II. a)*** *Staré pomocí nových.* Máme

$$x = \varphi(u, v, w),$$
$$y = \psi(u, v, w),$$
$$z = \xi(u, v, w).$$

Zobrazení transformace pak vypadá

$$\Psi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v, w) \\ \psi(u, v, w) \\ \xi(u, v, w) \end{pmatrix}.$$

Základní identita v tomto případě

$$z\big(\varphi(u, v, w(u, v)), \psi(u, v, w(u, v))\big) = \xi(u, v, w(u, v))$$

po zderivování podle u a v dává opět hledané vztahy.

1.7.2. ***II. b)*** *Nové pomocí starých.* Máme

$$u = \alpha(x, y, z),$$
$$v = \beta(x, y, z),$$
$$w = \gamma(x, y, z).$$

Zobrazení transformace pak vypadá

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x, y, z) \\ \beta(x, y, z) \\ \gamma(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Základní identita v tomto případě

$$w\big(\alpha(x, y, z(x, y)), \beta(x, y, z(x, y))\big) = \gamma(x, y, z(x, y))$$

po zderivování podle u a v dává opět hledané vztahy.

1.7.3. ***II. c)*** *Implicitní vazba.* ...

Příklad 1.7. *Ve výrazu*

$$(y - z)\partial_x z + (y + z)\partial_y z = 0,$$

proveďte záměnu proměnných

$$u = y - z,$$
$$v = y + z,$$
$$w = x.$$

1.8. **Polární transformace.** Polární transformace je transformace typu

$$x = \rho \cos \varphi, \;\; y = \rho \sin \varphi, \tag{1.3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Zatím můžeme brát

$$\rho \in< 0, +\infty),$$
$$\varphi \in< -\pi, \pi),$$

neboť pak máme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Tyto obory budeme muset omezit, kvůli požadavku regularity zobrazení

$$\Psi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Spočítejme derivaci zobrazení Ψ,

$$\Psi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

A Jakobián (determinant matice Ψ') jest roven

$$\det \Psi' = \boxed{\mathcal{J}_{\text{polární}} = \rho}.$$

Požadavek nenulovosti Jakobiánu transformace a otevřenosti oboru [3] nás omezí na

$$\rho \in (0, +\infty),$$
$$\varphi \in (-\pi, \pi).$$

Můžeme si povšimnout, že vypuštěním těchto hraničních bodů jsme z roviny xy odstranili tzv. Zápornou přímku (záporná část osy x), označme ji P_0. Pak víme, že zobrazení Ψ je regulární jako

$$\Psi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 - P_0.$$

1.8.1. *Náhrada některých diferenciálních výrazů.* V tomto odstavci si spočteme výrazy pro náhradu gradientu ∇ a Laplaciánu $\triangle$. Pro zopakování, v kartézských souřadnicích v $\mathbb{R}^2$ máme

$$\nabla_{xyz} = (\partial_x, \partial_y), \tag{1.4}$$
$$\triangle_{xyz} = \partial_x^2 + \partial_y^2. \tag{1.5}$$

Sestrojme základní identitu

$$z(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = w(\rho, \varphi),$$

z které derivací podle ρ a φ dostaneme následující vyjádření

$$\partial_x z = \cos\varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\sin\varphi}{\rho}\partial_\varphi w, \tag{1.6}$$
$$\partial_y z = \sin\varphi \cdot \partial_\rho w + \frac{\cos\varphi}{\rho}\partial_\varphi w. \tag{1.7}$$

Prostým dosazením do vztahu (1.4) dostaneme gradient v polárních souřadnicích [4]

$$\nabla_{\text{polární}} = \big(\cos\varphi \cdot \partial_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}\partial_\varphi,\ \sin\varphi \cdot \partial_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\partial_\varphi\big).$$

Pro odvození Laplaciánu je potřeba spočítat druhé derivace. to provedeme derivováním vztahů (1.6) a (1.7). Tyto výpočty jsou prostorově náročnější, takže je zde nebudeme vypisovat a je pouze na laskavém čtenáři, aby naše výsledky ověřil. Zjistí, že mnoho členů se dosazením do (1.5) vymlátí. Pak Laplacián v polárních souřadnicích má tvar

$$\triangle_{\text{polární}} = \partial^2_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} + \partial^2_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2}\partial^2_{\varphi\varphi}. \tag{1.8}$$

1.9. **Cylindrická (válcová) transformace.** Cylindrická transformace má tvar

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$
$$z = \xi.$$

Bez omezení zatím uvažujeme

$$\rho \in < 0, +\infty),$$
$$\varphi \in < -\pi, \pi >$$
$$\xi \in \mathbb{R}.$$

[3] viz. 1.1 a 1.2.

[4] Pozor! Jde o náhradu z kartézských souřadnic!

Zjistíme, kdy je zobrazení Ψ regulární. Máme

$$\Psi\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ \xi\end{pmatrix}.$$

Derivace dává

$$\Psi'\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Jakobián cylindrické transformace

$$\boxed{\mathcal{J}_{\text{cylindr.}}=\rho}.$$

Odtud dostáváme omezení na obory

$$\begin{aligned}&\rho\in\mathbb{R}^+,\\ &\varphi\in(-\pi,\pi)\\ &\xi\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Opět tedy vypouštíme zápornou přímku P_0 (teď je to rovina). Pro výpočet integrálu to nehraje žádnou roli, neboť $\nu(P_0)=0$. Zobrazení Ψ je regulární při

$$\Psi:\mathbb{R}^+\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3-P_0\times\mathbb{R}.$$

1.9.1. *Výpočet některých diferenciálních výrazů.* V tomto případě budeme derivovat základní identitu

$$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,\xi)=w(\rho,\varphi,\xi)$$

podle x, y a z. Pokud si ovšm neuvědomíme, že hledané derivace jsou stejné jako v případě (1.6) a (1.7). Stačí jen spočísti derivaci podle z (derivováním základní identity podle ξ), která je však triviální

$$\partial_z f=\partial_\xi w.$$

Odtud dostáváme gradient v cylindrických souřadnicích

$$\nabla_{\text{cylindr.}}=\big(\cos\varphi\cdot\partial_\rho-\frac{\sin\varphi}{\rho}\partial_\varphi,\ \sin\varphi\cdot\partial_\rho+\frac{\cos\varphi}{\rho}\partial_\varphi,\partial_\xi\big).$$

Stejně tak můžeme využít výsledků (1.8) a dostaneme Laplacián v cylindrických souřadnicích

$$\triangle_{\text{cylindr.}}=\underbrace{\partial^2_{xx}+\partial^2_{yy}}_{\text{známe z polárních souř.}}+\partial^2_{zz}=\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho)+\frac{1}{\rho^2}\partial^2_{\varphi\varphi}+\partial^2_{\xi\xi}.$$

1.10. **Sférická transformace.** Pro sférickou transformaci platí

$$\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi\cos\vartheta,\\ y&=\rho\sin\varphi\cos\vartheta,\\ x&=\rho\sin\vartheta,\end{aligned}$$

při zatím neomezených podmínkách

$$\begin{aligned}&\rho\in<0,+\infty),\\ &\varphi\in<-\pi,\pi>,\\ &\vartheta\in<-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}>.\end{aligned}$$

Regularita zobrazení

$$\Psi\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ \vartheta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\cos\vartheta\\ \rho\sin\varphi\cos\vartheta\\ \rho\sin\vartheta\end{pmatrix}.$$

Po několika úpravách dostaneme

$$\det\Psi'=\boxed{\mathcal{J}_{\text{sférická}}=\rho\cos\vartheta}.$$

Regularitu tedy máme pro

$$\Psi : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 - P_0 \times \mathbb{R}.$$

1.10.1. *Náhrada některých diferenciálních výrazů.* Základní identita má tvar

$$f = f(\rho \cos\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\varphi \cos\vartheta, \rho \sin\vartheta) = w(\rho, \varphi, \vartheta).$$

Derivováním této identity podle ρ, φ a ϑ dostaneme soustavu lineární vzhledem k členům $\partial_x f$, $\partial_y f$ a $\partial_z f$, které hledáme. Tuto soustavu vyřešíme pomocí Cramerova pravidla (viz. [**?**, p. 80, Věta 83.]) a zjistíme, že

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= \cos\vartheta \cos\varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\sin\varphi}{\rho \cos\vartheta} \partial_\varphi w - \frac{\cos\varphi \sin\vartheta}{\rho} \partial_\vartheta w, \\
\partial_y f &= \cos\vartheta \sin\varphi \cdot \partial_\rho w - \frac{\cos\varphi}{\rho \cos\vartheta} \partial_\varphi w - \frac{\sin\varphi \sin\vartheta}{\rho} \partial_\vartheta w, \\
\partial_z f &= \sin\vartheta \cdot \partial_\rho w + \frac{\cos\vartheta}{\rho} \partial_\vartheta w.
\end{aligned}$$

Pak můžeme gradient zapsat jako

$$\nabla_{\text{sférické}} f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f).$$

Laplace...

Poznámka 1.5. Sférickou transformaci můžeme dostat jako složení dvou válcových.

1.11. **Zobecněná sférická transformace.**

Příklad 1.8. *Mějme množinu*

$$M \equiv x^3 + y^3 + z^3 = 1, \quad x, y, z > 0.$$

Proveďte transformaci

$$x = \rho \cos^{2/3}\varphi \cos^{2/3}\vartheta, y \qquad = \rho \sin^{2/3}\varphi \cos^{2/3}\vartheta, z = \rho \sin^{2/3}\vartheta.$$

Příklad 1.9. *Ve výrazu*

$$\partial^2_{xx} z + 2xy^2 \partial_x z + 2(y - y^3)\partial_y z + x^2 y^2 z = 0$$

proveďte záměnu

$$\begin{aligned}
x &= uv, \\
y &= \frac{1}{v}, \\
z &= w.
\end{aligned}$$

Příklad 1.10. *Ve výrazu*

$$\partial^2_{xx} z + \partial^2_{yy} z + cz = 0, \quad c > 0$$

proveďte záměnu

$$\begin{aligned}
x &= e^u \cos v, \\
y &= e^u \sin v, \\
z &= w.
\end{aligned}$$

Příklad 1.11. *V* ***obyčejné*** *diferenciální rovnici*

$$y' y''' - 3(y'')^2 = x$$

proveďte záměnu

$$t = y, \; u = x.$$

1.12. **Příklady - Děmidovič.** V následujících výrazech proveďte zadané záměny.

P. 1.1. 3434. $x^2 + y'' + xy' + y = 0$, když $x = e^t$.

$[\ \ddot{y} + y = 0\ ]$

P. 1.2. 3435. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, když $t = \ln|x|$.

$[\ \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - 6y = 0\ ]$

P. 1.3. 3436. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, když $x = \cos t$.

$[\ \ddot{y} + n^2 y = 0\ ]$

P. 1.4. 3437. $y'' + y' \tanh x + \frac{m^2}{\cosh^2 x} y = 0$, když $x = \ln\tan\frac{t}{2}$.

$[\ \ddot{y} + m^2 y = 0\ ]$

P. 1.5. 3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, když

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

kde $p(x) \in C^1$.

$[\ u'' + \big(q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)\big)u = 0\ ]$

P. 1.6. 3439. $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, když $x = e^t$ a $y = ue^{2t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} + (u + 3)\dot{u} + 2u = 0\ ]$

P. 1.7. 3440. $(1 + x^2)^2 y'' = y$, když $x = \tan t$ a $y = \frac{u}{\cos t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} = 0\ ]$

P. 1.8. 3441. $(1 - x^2)^2 y'' = -y$, když $x = \tanh t$ a $y = \frac{u}{\cosh t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} = 0\ ]$

P. 1.9. 3442. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, když $x = u + t$ a $y = u - t$, kde $u = u(t)$.

$[\ \ddot{u} + 8u\dot{u}^3 = 0\ ]$

P. 1.10. 3443. $y''' - x^3 y'' + xy' - y = 0$, když $x = \frac{l}{t}$ a $y = \frac{u}{t}$, kde $u = u(t)$.

$[\ t^5 \dddot{u} + (3t^4 + 1)\ddot{u} + \dot{u} = 0\ ]$

P. 1.11. 3444. Proveďte záměnu v *Stokesově* rovnici

$$y'' = \frac{Ay}{(x - a)^2 (x - b)^2},$$

pomocí

$$u = \frac{y}{x - b},$$
$$t = \ln\Big|\frac{x - a}{x - b}\Big|,$$

kde $u = u(t)$.

$[\ u'' - u' = \frac{A}{(a-b)^2} u\ ]$

P. 1.12. 3445. Ukažte, že když rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

převedete záměnou $x = \varphi(\xi)$ na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} + P(\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

pak platí, že

$$\big(2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)\big)\big(Q(\xi)\big)^{-3/2} = \big(2p(x)q(x) + q'(x)\big)\big(q(x)\big)^{-3/2}$$

P. 1.13. 3446. Ve výrazu $\Phi(y, y', y'') = 0$, kde Φ je homogenní (adnarodnaja funkcija) funkce y, y', y'', položte

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} u \mathrm{d}x}.$$

[$\Phi(1, u, u' + u^2) = 0$]

P. 1.14. 3447. Ve výrazu $F(x^2y'', xy', y) = 0$, kde Φ je homogenní funkcí svých argumentů, položte

$$u = x\frac{y'}{y}.$$

[$F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0$]