1. Kvadriky

Definice 1.1. (Kvadratická funkce) Buďte $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická, $A \neq \Theta$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Pak zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^{\mathrm{T}} A x - 2b^{\mathrm{T}} x + c$$

se nazývá kvadratická funkce. Množina $\mathcal{Q} = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ se nazývá kvadrika s rovnicí $f(x) = 0$.

Poznámka 1.1. V této definici jsme použili značení standardního skalárního součinu pomocí sloupcových a řádkových vektorů. Zřejmě platí

$$x^{\mathrm{T}} A x = (x, Ax)$$

$$b^{\mathrm{T}} x = (b, x)$$

Tohoto zápisu budeme zhusta používat.

Definice 1.2. (Souřadná soustava) Nechť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$. Pak dvojici $(\mathcal{X}, s)$ nazýváme soustavou souřadnic s bází $\mathcal{X}$ a počátkem s.

Poznámka 1.2. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$

$$x = s + \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

když $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ a souřadnice $y = (y_1, \dots, y_n)$. Pomocí matice přechodu $\mathbb{P}$ zapíšeme výše uvedený vztah jako $x = s + \mathbb{P} y$

Poznámka 1.3. V následujícím textu se tedy budeme snažit zjednodušit výraz pro $f(x)$ přechodem k jiné soustavě souřadné.

Máme tedy

$$f(x) = f(s + \sum_{i=1}^{n} y_i x_i) = f(s + \mathbb{P}y) = (s + \mathbb{P}y)^{\mathrm{T}} \mathbb{A} (s + \mathbb{P}y) - 2b^{\mathrm{T}}(s + \mathbb{P}y) + c =$$

$$= s^{\mathrm{T}} \mathbb{A} s + s^{\mathrm{T}} \mathbb{A} \mathbb{P} y + (\mathbb{P}y)^{\mathrm{T}} \mathbb{A} s + (\mathbb{P}y)^{\mathrm{T}} \mathbb{A} \mathbb{P} y - 2b^{\mathrm{T}} s - 2b^{\mathrm{T}} \mathbb{P} y + c =$$
$$= y^{\mathrm{T}} \mathbb{P}^{\mathrm{T}} \mathbb{A} \mathbb{P} y + 2(s^{\mathrm{T}} \mathbb{A} - b^{\mathrm{T}}) \mathbb{P} y + s^{\mathrm{T}} \mathbb{A} s - 2b^{\mathrm{T}} s + c = f_1(y)$$

Odvození je správné, protože členy $s^{\mathrm{T}} \mathbb{A} \mathbb{P} y$ a $(\mathbb{P}y)^{\mathrm{T}} \mathbb{A} s$ se rovnají. (Jsou to vůči sobě transponovaná reálná čísla.) $f_1(y)$ je opět kvadratickou funkcí. Z odvozeného zápisu vyplývá několik zajímavých možností:

- Určitou záměnou můžeme zrušit konstantu (pokud $f(s) = 0$).
- Pro eliminaci lineárního členu je zapotřebí, aby $s^{\mathrm{T}} \mathbb{A} - b^{\mathrm{T}} = \Theta$.

Pokud $\mathbb{A}$ je symetrická pak existuje $\mathbb{P}$ tak, že $\mathbb{P}^{\mathrm{T}} \mathbb{A} \mathbb{P}$ je diagonální a tedy

$$y^{\mathrm{T}} \mathbb{P}^{\mathrm{T}} \mathbb{A} \mathbb{P} y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

A tedy existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $s^{\mathrm{T}} \mathbb{A} - b^{\mathrm{T}} = \Theta$. Dosáhneme toho, že lineární člen vypadne, tj. $\mathbb{A} s = b$.

Definice 1.3. (Střed kvadriky) Bod $s \in \mathbb{R}^n$ se nazývá středem kvadriky $\mathcal{Q}$ právě když $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(f(s + x) = f(s - x))$. Existuje-li alespoň jeden střed kvadratické funkce, pak se kvadrika nazývá centrální. Neexistuje-li, nazýváme ji necentrální. Označíme S_f množinu všech středů f.

Věta 1.1. Platí následující tvrzení:

(i) $\mathcal{Q} = f^{-1}(0)$ je centrální právě tehdy, když existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbb{A} s = b$.
(ii) $S_f = \{s \in \mathbb{R}^n | \mathbb{A} s = b\}$ je varieta.
(iii) $f|_{S_f} = const.$ (tzv. centrální hodnota)

Důkaz: ad (i) a (ii):

$$f(s \pm x) = s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}s \pm 2s^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x + x^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x - 2b^{\mathrm{T}} \mp 2b^{\mathrm{T}}x + c =$$

$$= x^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x \pm 2(s^{\mathrm{T}}\mathbb{A} - b^{\mathrm{T}})x + f(s)$$

Nyní vidíme, že tvrzení č. 1 a 2 věty platí.

$$\text{ad(iii): Nechť} s_1, s_2 \in S = f, s_2 = x + s_1, x \neq 0$$

$$f(s_2) = f(s_1) = x^{\mathrm{T}}\mathbb{A}x + 2(\mathbb{A}s_1 - b)^{\mathrm{T}}x + f(s_1) = f(s_1)$$

První člen je nula, protože $\mathbb{A}x = \mathbb{A}(s_2 - s_1) = \mathbb{A}(s_2) - \mathbb{A}(s_1) = 0$, druhý člen je nula, protože $s_1 \in S_f$

Závěr: Pro centrální kvadriky existuje souřadný systém $(\mathcal{X}, s)$ tak, že (je-li y zápis souřadnic bodu x v systému $(\mathcal{X}, s)$):

$$f(x) = f_1(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + f_0, f_0 = f(s).$$

Poznámka 1.4. Některé zápisy

- Nechť f je centrální, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $k = \mathrm{h}(\mathbb{A}) \leq n$, $s \in S_f$, $\mathcal{X}$ je diagonální báze taková, že

  $$(\forall j \in \hat{k})(\lambda_j \neq 0)(\forall j = k+1 \ldots, n)(\lambda_j = 0).$$

  Pak se $(\mathcal{X}, s)$ nazývá tzv. Kanonickou soustavou souřadnic. f má v této soustavě tvar

  $$f(x) = f_1(y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 + f_0.$$

- Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$, $p \geq k$ a $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_k < 0$. Potom podle hodnoty f_0 můžeme standardní tvar kvadriky $\mathcal{Q} = f^{-1}(0)$ zapsat následujícími způsoby
  (1) Pokud $f_0 = 0$ pak

  $$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{k} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 = 0,$$

  kde

  $$\lambda_i = \frac{1}{\alpha_i^2}, \qquad i \in \hat{p},$$
  $$\lambda_i = -\frac{1}{\alpha_i^2}, \qquad i = p+1, \ldots, k.$$

  (2) Pokud $f_0 \neq 0$ pak

  $$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{k} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 = 1,$$

  kde

  $$\frac{1}{\alpha_i^2} = \pm\frac{1}{|f_0|}|\lambda_i|, i \in \hat{k}.$$

Definice 1.4. Reálné osy mají indexy $i \in \hat{p}$, imaginární osy $i \in \{p+1, \ldots, k\}$. Hodnost $\mathbb{A}$ je rovna n, právě když je to regulární kvadrika.

1.1. **Necentrální kvadriky.**

Poznámka 1.5. Nyní nelze odstranit lineární člen (rovnice $\mathbb{A}s = b$ nemá řešení). Zkusíme tedy najít s tak, aby $f(s) = 0$.

Poznámka 1.6. Jestliže matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická pak $\ker \mathbb{A} \oplus \operatorname{Im} \mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ [1].

Věta 1.2. Nechť f je necentrální, $b = b_1 + b_2$, kde $b_1 \in \operatorname{Im} \mathbb{A}$ a $b_2 \in \ker \mathbb{A}$. Pak existuje $s \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbb{A}s = b_1$.

Definice 1.5. (Vrchol) Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ takový, že $f(s) = 0$ se nazývá vrchol f. Množina vrcholů se označuje V_f.

Poznámka 1.7. (Kanonický tvar) Pokud $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná pomocí báze $\mathcal{X}$ (kanonická báze), $\mathrm{h}(\mathbb{A}) = k$, $s \in V_f$ a označíme-li souřadnice v $(\mathcal{X}, s)$ y, kde

$$x_{k+1} = \frac{1}{\|b_2\|} b_2,$$

pak kanonický tvar $\mathbb{A}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i)^2 - 2\|b_2\| y_{k+1} = \mathcal{Q}.$$

Poznámka 1.8. (Standardní tvar)

1.2. **Kvadriky v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ - kuželosečky.** Následují příklady některých často se vyskytujících kvadrik, tyto naleznete v Tabulce č. 1.2.

Rovnice kvadriky	Označení
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elipsa
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	bod
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvě přímky
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	dvě přímky
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2} = 0$	přímka
$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	parabola

Tabulka 1. Kvadriky v R^2

Dále uvedeme některé kvadriky v R^3, v této tabulce nechť $a, b, c > 0$. Ty jsou v Tabulce č. 2.

1.3. **Kvadriky v $\mathbb{R}^3$.**

1.4. **Příklady.** V následujícím textu se budeme zabývat kvadrikami v $\mathbb{R}^2$.

Příklad 1.1. *Máme kvadriku o rovnici*

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

[1] Zde $\ker \mathbb{A} = \mathbb{A}^{-1}(\Theta)$ a $\operatorname{Im} \mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$.

Rovnice kvadriky	Označení
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	elipsoid
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	jednodílný hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	dvoudílný hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	střed (bod)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	kužel
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	eliptický válec
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	hyperbolický válec
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	přímka
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	dvojice rovin
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	eliptický paraboloid
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	hyperbolický paraboloid
$\frac{x^2}{a^2}=1$	dvojice rovin
$\frac{x^2}{a^2}=-1$	prázdná množina
$\frac{x^2}{a^2}=0$	rovina
$\frac{x^2}{a^2}=2y$	parabolický válec

TABULKA 2. Kvadriky v R^3

Porovnáním s obecným tvare v $\mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x,y)\mathbb{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-2b^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+c$$

dostaneme

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}16\\28\end{pmatrix},\ c=80.$$

Matice $\mathbb{A}$ je regulární a proto existuje právě jedno s tak, že $\mathbb{A}s=b$. Řešme proto

$$s$$

Příklad 1.2. *Máme kvadriku o rovnici*

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0.$$

Příklad 1.3. *Máme kvadriku o rovnici*

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+2y+2z-2=0.$$