1. Komplexní derivace

Komplexní analýzu se Vrána tradičně snaží stihnout v průběhu tří přednášek, což dost dobře není možné. Proto provádí důkazy hodně zrychleně a některá důležitá tvrzení nedokazuje vůbec. Existují velmi pěkně napsaná skripta Komplexní analýza pro učitele od Jiřího Veselého, která jsou mimo jiné i doporučenou učebníci k přednášce Funkce komplexní proměnné od docenta Pošty. Ke zkoušce by ale mělo stačit naučit se to, co Vrána odpřednášel (někdy toho je méně, než kolik obsahují Wikiskripta, jindy zase více – podle toho, kolik hodin během semestru odpadne).

Definice komplexní funkce komplexní proměnné je formálně úplně stejná jako v $\mathbb{R}$.

Definice 1.1. Buď $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in (\operatorname{Dom} f)^\circ$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

říkáme, že funkce f je v bodě z_0 (komplexně) diferencovatelná a příslušnou limitu značíme $f'(z_0)$.

Topologicky je normovaný prostor $\mathbb{C}$ totožný s $\mathbb{R}^2$. Na zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se tedy lze dívat i jako na zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Označme reálnou, resp. imaginární část takového zobrazení jako f_1 a f_2, tj. pišme $f(z) = f(x+\mathbf{i}y) = f_1(x,y) + \mathbf{i}f_2(x,y)$. Pak se můžeme ptát, jaký je vztah mezi komplexní diferencovatelností funkce f a diferencovatelností reálného zobrazení $\vec{f} = (f_1, f_2)$. Na tuto otázku podává odpověď následující věta.

Věta 1.2. Funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je v bodě[1] $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ komplexně diferencovatelná právě tehdy, když je diferencovatelné výše definované zobrazení $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a zároveň jsou splněny tzv. Cauchyho–Riemannovy podmínky $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$.

Důkaz. Můžeme psát

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-\alpha h}{|h|}\frac{|h|}{h} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-\alpha h}{|h|} = 0.$$

(Druhou ekvivalenci lze zdůvodnit tím, že oba výrazy mají v každém bodě stejnou absolutní hodnotu a přitom platí, že libovolný výraz jde k nule právě tehdy, když jde k nule v absolutní hodnotě. Nejspíš existuje i nějaké elegantnější zdůvodnění.) Rozepíšeme-li α jako $\alpha_1 + \mathbf{i}\alpha_2$ a $h = h_1 + \mathbf{i}h_2$ a roznásobíme-li všechno do mrtě, zjistíme, že poslední výrok je dále ekvivalentní

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(*) + \mathbf{i}f_2(*) - f_1(x_0,y_0) - \mathbf{i}f_2(x_0,y_0) - [(\alpha_1h_1 - \alpha_2h_2) + \mathbf{i}(\alpha_2h_1 + \alpha_1h_2)]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,$$

kde $(*)$ pro nedostatek místa značí vyčíslení v bodě (x_0+h_1, y_0+h_2). Upravujme dále. Výraz, jehož limitu počítáme, má za obor hodnot komplexní čísla. Pokud tato čísla interpretujeme jako dvojice reálných čísel, tj. pokud využijeme izomorfismus $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, můžeme ekvivalentně psát

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\vec{f}(x_0+h_1, y_0+h_2) - \vec{f}(x_0,y_0) - \big((\alpha_1h_1 - \alpha_2h_2), (\alpha_2h_1+\alpha_1h_2)\big)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \vec{0}.$$

Tuto rovnost lze dále přepsat jako

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\vec{f}(x_0+h_1, y_0+h_2) - \vec{f}(x_0,y_0) - L\vec{h}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \vec{0},$$

přičemž jako L jsme označili lineární operátor na $\mathbb{R}^2$, který vektoru (h_1,h_2) přiřadí vektor $\big((\alpha_1h_1 - \alpha_2h_2), (\alpha_2h_1+\alpha_1h_2)\big)$. Vztah, který jsme získali, ale znamená právě a pouze to, že zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má v bodě (x_0,y_0) derivaci L.

[1] Dodržujeme úmluvu, že když číslo zapíšeme ve tvaru $x + \mathbf{i}y$, jsou x i y reálná čísla. Pokud tomu tak nebude, budeme se snažit na to upozornit.

Stačí už jen ověřit, že operátor L splňuje Cauchyho–Riemannovy podmínky. Jeho matice je $\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{smallmatrix}\right)$. Matice derivace zobrazení $\vec{f} = (f_1, f_2)$ má přitom vždy tvar $\left(\begin{smallmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{smallmatrix}\right)$. □

Komplexní diferencovatelnost f je tedy výrazně silnější vlastnost než reálná diferencovatelnost příslušného zobrazení $\vec{f}$. Následující příklad ukáže, že ani velmi „hezké“ funkce nemusejí mít derivaci.

Příklad. Uvažme funkci $f(z) = \overline{z}$. Pak $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = -y$. Spočítáme-li příslušné parciální derivace, dostaneme $\partial_x f_1 = 1$, ale $\partial_y f_2 = -1$. V žádném bodě tedy nejsou splněny Cauchyho–Riemannovy podmínky, a funkce f proto není nikde diferencovatelná.

Uvědomme si, že funkce $z \mapsto \overline{z}$ je přitom na celém $\mathbb{C}$ spojitá. Sestavit funkci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je všude spojitá, ale nikde diferencovatelná, je sice rovněž možné, ale neúměrně náročnější – komplexní analýza se od té reálné diametrálně liší. Jak říká Vrána: „Mít komplexní derivaci, to už je síla.“

Na druhé straně mají i mnohé společné. Následující tři tvrzení lze dokázat naprosto stejným způsobem jako v prvním semestru, proto je uvádíme bez důkazu.

Věta 1.3. Nechť má funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivaci v bodě z_0. Pak je v tomto bodě spojitá.

Věta 1.4. Nechť f, g mají derivaci v z_0. Pak
- (i) $(f + cg)'(z_0) = f'(z_0) + cg'(z_0)$,
- (ii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.
- (iii) Jestliže $g'(z_0) \neq 0$, pak
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{1}{g^2(z_0)}g'(z_0).$$

Věta 1.5. Nechť $\exists f'(g(z_0))$, $\exists g'(z_0)$. Pak $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$.

Než se Vrána pustí do ústřední části teorie funkcí komplexní proměnné, tedy do kapitoly o holomorfních funkcích, udělá odbočku a zavede některé elementární funkce na $\mathbb{C}$. Protože to v našem ročníku udělal dost zmateně a místy i chybně, nebudeme formulovat jeho tvrzení do vět a definic, pouze do volného textu.

Komplexní exponenciálu lze definovat vztahem $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Víme, že jde o mocninnou řadu s nekonečným poloměrem konvergence, která se na reálné ose rovná reálné exponenciále definované v prvním ročníku.

Protože je mocninná řada s nekonečným poloměrem konvergence v každém bodě absolutně konvergentní, lze přímočarým roznásobením dokázat identitu $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$:
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{N-k}}{(N-k)!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} z_1^k z_2^{N-k} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(z_1 + z_2)^N$$

Když do mocninné řady definující exponenciálu dosadíme $\mathbf{i}z$ a následně seskupíme sudé a liché členy, získáme rovnost
$$e^{\mathbf{i}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i}z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \mathbf{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Sudou část funkce $e^{\mathbf{i}z}$ označíme $\cos z$ a lichou jako $\mathbf{i} \sin z$. Tím jsme na celé komplexní rovině definovali sinus a kosinus. Předešlou rovnost můžeme přepsat jako $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i} \sin z$ a ze sudosti kosinu a lichosti sinu hned odvodíme i obě dvojice vztahů
$$\cos z = \frac{e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}},$$
resp.
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$
Druhá dvojice vztahů přitom ukazuje, že se naše „nové“ definice na reálné ose shodují s těmi původními.

Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{i}(z_1+z_2)} &= e^{\mathbf{i}z_1}e^{\mathbf{i}z_2} \\ &= (\cos z_1 + \mathbf{i}\sin z_1)(\cos z_2 + \mathbf{i}\sin z_2) \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + \mathbf{i}(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2), \end{aligned}$$

přičemž první závorka obsahuje sudou a druhá lichou funkci, takže platí

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Z toho snadno zjistíme, že identity

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$$

platí pro každé komplexní z.

Taktéž můžeme díky sudosti kosinu a lichosti sinu odvodit důležitou identitu

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) = \cos(z - z) = 1,$$

ale **pozor**! Neplyne z ní, že $\cos^2 z$ a $\sin^2 z$ leží v intervalu $[0, 1]$, protože v komplexním oboru lze odmocnit i záporné číslo. Funkce sinus a kosinus nejsou v $\mathbb{C}$ omezené!

Definujme dále jako obvykle

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

a učiňme snadné pozorování

$$\cos z = \cosh \mathbf{i}z, \quad \sin z = -\mathbf{i}\sinh \mathbf{i}z.$$

Nyní už jsme připraveni vyjádřit reálnou a imaginární část exponenciály, sinu a kosinu. Následující vztahy sice platí obecně, ale zdaleka nejzajímavější jsou pro nás v případě, že x a y jsou reálná čísla.

$$e^{x+\mathbf{i}y} = e^x e^{\mathbf{i}y} = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y);$$

$$\sin(x + \mathbf{i}y) = \sin x \cos \mathbf{i}y + \sin \mathbf{i}y \cos x = \sin x \cosh y + \mathbf{i}\sinh y \cos x;$$

$$\cos(x + \mathbf{i}y) = \cos x \cosh y - \mathbf{i}\sin x \sinh y.$$

Protože chování reálných funkcí máme dobře prozkoumané, jsme schopni pomocí předešlého vyjádření určit nulové body sinu v komplexním oboru:

$$\sin z = \sin(x + \mathbf{i}y) = 0 \Leftrightarrow \sin x \cosh y = 0 \wedge \sinh y \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \wedge y = 0.$$

Derivace je možné snadno spočítat třeba pomocí pravidla o derivování mocninné řady člen po členu:

$$(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Prozkoumejme na závěr, zda je exponenciála prostá. Nejprve snadno zjistíme, že $e^{z_1} = e^{z_2}$ právě tehdy, když $e^{z_1 - z_2} = 1$. Potřebujeme tedy zjistit, pro která z je $e^z = 1$. K tomu opět využijeme rozklad na reálnou a imaginární část. Podmínka

$$e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y) = 1$$

je splněna právě tehdy, když $e^x \sin y = 0$ a zároveň $e^x \cos y = 1$, což je ekvivalentní tomu, že x lze zvolit libovolně a $y = 2k\pi$. Ukázali jsme tedy, že exponenciála není prostá – naopak, je periodická s periodou $\mathbf{i}2\pi$. Pro účely definování inverzní funkce, logaritmu, ji budeme muset zúžit na nějaký pás, na němž je exponenciála prostá. Takový pás má pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ tvar

$$E_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Im}(z) \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi]\}.$$

Na každém takovém pásu představuje exponenciála bijekci $E_\alpha \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, protože každé nenulové komplexní číslo z lze zapsat ve tvaru $e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$; stačí totiž za e^x dosadit $|z|$ a dostaneme známý goniometrický tvar komplexního čísla. Tohoto pozorování zanedlouho využijeme při zavedení logaritmu; nejdřív ale definujeme tzv. argument, což je úhel, který dané číslo svírá s reálnou osou.

Definice 1.6. **Argumentem komplexního čísla** z nazýváme množinu $\operatorname{Arg} z = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z|\, e^{\mathbf{i}\alpha}\}$.

Definice 1.7. Buď $\vartheta \in \mathbb{R}$. Potom je pro $z \neq 0$ množina $\operatorname{Arg} z \cap (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi]$ jednoprvková. Její jediný prvek označíme jako $\arg_\vartheta z$, čímž definujeme funkci $\arg_\vartheta \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi]$. Funkci $\arg_0$ značíme zkráceně arg.

Poznámka. Snadno ověříme, že platí rovnost $\arg_\vartheta z = \arg(ze^{-\mathbf{i}\vartheta}) + \vartheta$.

Definice 1.8. Pro libovolné $\vartheta \in \mathbb{R}$ definujeme polopřímku $P_\vartheta = \{te^{\mathbf{i}\vartheta} \mid t \in \mathbb{R}^+\}$.

Poznámka. (1) Funkce $\arg z$ není spojitá na P_π a nikde nemá derivaci. (Neexistence derivace plyne z nespojitosti, viz z následující bod; pro dokázání mírně slabšího tvrzení stačí využít větu **??**.)

(2) Pro $z = x + \mathbf{i}y$ lze argument vyjádřit explicitně třeba takto:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|} & \text{pro } y \geq 0, \\ -\arccos \frac{x}{|z|} & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

Je možné využít i vyjádření pomocí arcsin nebo arctg.

(3) Jsme také schopni spočítat argument součinu, resp. podílu:

$$\begin{aligned} \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi\varepsilon, \\ \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi\varepsilon, \\ \arg \frac{1}{z} &= -\arg z + 2\pi\varepsilon, \end{aligned}$$

přičemž ε volíme -1, 0 nebo 1 tak, abychom zůstali v základním intervalu. Kdybychom místo funkcí arg pracovali s množinami Arg, nebyli bychom nuceni přičítat $2\pi\varepsilon$.

(4) Nechť funkce $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ splňují Cauchyho–Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

a nechť jsou navíc třídy $\mathcal{C}^2$. Zderivováním první podmínky podle x a druhé podle y získáme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Když obě rovnosti sečteme a využijeme záměnnosti parciálních derivací, dostaneme $\Delta f_1 = 0$. Analogickým postupem bychom odvodili i $\Delta f_2 = 0$. Obě funkce f_1, f_2 jsou tedy harmonické, čehož se využívá například při modelování profilů letadel.

Nyní se pustíme do zkoumání logaritmu, tj. inverzní funkce k exponenciále.

Definice 1.9. Zaveďme množinu $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} \mid z = e^w\}$. Pokud chceme, aby byl logaritmus funkce, musíme se zúžit na některý z pásů E_ϑ. Definujme tedy pro $z \neq 0$ hodnotu $\ln_\vartheta z$ dvojicí podmínek

$$\ln_\vartheta z \in \operatorname{Ln} z \wedge \mathbf{Im}(\operatorname{Ln})_\vartheta z \in (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi].$$

Speciálně označme $\ln = \ln_0$ a nazvěme tuto funkci **logaritmus komplexního čísla**.

Poznámka. (1) Když hledáme logaritmus komplexního čísla z, rozepišme ho na reálnou a imaginární část: $\ln_\vartheta z = u + \mathbf{i}v$. Dostáváme podmínku $z = e^u e^{\mathbf{i}v} = e^u(\cos v + \mathbf{i} \sin v)$. Zjevně $|z| = e^u$ a $v = \arg_\vartheta z$, tj.

$$\ln_\vartheta z = \ln |z| + \mathbf{i} \arg_\vartheta z.$$

Speciálně platí $\ln z = \ln |z| + \mathbf{i} \arg z$.

(2) Spočítejme, zda má logaritmus derivaci v bodě $z \neq 0$. Víme, že $\mathbf{Re}(\ln z) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathbf{Im}(\ln z) = \arg z$. Určeme nejprve derivaci reálné a imaginární části.

$$\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$
$$(\arg z)' = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

ale pouze mimo polopřímku P_π, na níž je argument nespojitá funkce, a nemůže tedy mít derivaci. Obě funkce f_1, f_2 mají totální derivaci (parciální derivace jsou totiž spojité) a zároveň zjevně platí Cauchyho–Riemannovy podmínky. Podle věty 1.2 proto komplexní derivace existuje. Můžeme ji tedy spočítat limitou přes některou konkrétní podmnožinu, třeba přes reálnou přímku. Obecně v případě existence derivace platí

$$(f(z_0))' = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathbf{i}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0);$$

v případě logaritmu tedy dostáváme

$$(\ln z)' = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathbf{i}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

(3) [2] Analogicky s reálnými funkcemi definujeme

$$\operatorname{argsinh} z = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right), \quad \operatorname{argcosh} z = \ln\left(z+\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}\right), \quad \operatorname{argtgh} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

(Definice argcosh se může zdát podivná, ale rovnost $\sqrt{z-1}\sqrt{z+1} = \sqrt{z^2-1}$ obecně pro komplexní odmocninu neplatí.)

$$\arcsin z = -\mathbf{i}\ln\left(\mathbf{i}z+\sqrt{1-z^2}\right), \quad \arccos z = -\mathbf{i}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) = -\mathbf{i}\ln\left(z+\mathbf{i}\sqrt{1-z^2}\right),$$
$$\operatorname{arctg} z = \frac{\mathbf{i}}{2}\ln\left(\frac{1-\mathbf{i}z}{1+\mathbf{i}z}\right)$$

(4) Pro $z \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$ můžeme definovat $z^\alpha = e^{\alpha\ln z}$; tato definice je jednoznačná. Lepší[3] je definovat obecnou mocninu jako „víceznačnou funkci“, tj. jako množinu (obdobně jako Ln a Arg):

$$z^\alpha = e^{\operatorname{Ln} z} = \{e^{\alpha\ln z + \alpha\, 2k\pi\mathbf{i}} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mohlo by se zdát, že má množina z^α vždy nekonečně mnoho prvků. Tak tomu ale není, neboť exponenciála je periodická s periodou $2\pi\mathbf{i}$. To má za následek, že pro $\mathbf{Re}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ a $\mathbf{Im}(\alpha) = 0$ je z^α definováno jednoznačně. Pro $\mathbf{Re}(\alpha) \in \mathbb{Q}$ a $\mathbf{Im}(\alpha) = 0$ má množina q prvků, kde q je jmenovatel $\mathbf{Re}(\alpha)$ ve zkráceném tvaru. (V komplexních číslech tedy například existuje pět pátých odmocnin.) A pokud je $\mathbf{Re}(\alpha)$ iracionální nebo $\mathbf{Im}(\alpha) \neq 0$, pak je prvků skutečně nekonečně mnoho. Pro $\mathbf{Im}(\alpha) = 0$ se kořeny nacházejí na kružnici, pro $\mathbf{Re}(\alpha) = 0$ na polopřímce a pro $\mathbf{Re}(\alpha) \neq 0 \wedge \mathbf{Im}(\alpha) \neq 0$ jsou umístěny na spirále.

Například

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}} = \{e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{i}+2k\pi\mathbf{i}\right)} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R};$$
$$x^{\frac{3}{5}} = \{e^{\frac{3}{5}\ln x}e^{\frac{3}{5}2k\pi\mathbf{i}} \mid k \in \widehat{5}\};$$
$$x^{\sqrt{2}} = \{e^{\sqrt{2}\ln x}e^{\sqrt{2}\,2k\pi\mathbf{i}} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Podobný problém s nejednoznačností nastává i u dalších funkcí, k jejichž definici se použil logaritmus, tedy arcsin, argsinh, …

[2] Této části moc nerozumím a v našem ročníku ji Vrána neprobíral. Mazat se mi ji nechtělo, ale berte ji s ještě větší rezervou než zbytek textu.

[3] Citation needed.