1. Newtonova formule v $\mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Buďte $f, g \in \mathcal{C}^1[\alpha,\beta]$, množinu $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (\alpha,\beta),\ g(x) < y < f(x)\}$ nazýváme **elementární oblastí typu** $x(y)$.

Poznámka. Definujeme $\varphi = \varphi_g \dotplus \varphi_\beta \dot{-} \varphi_f \dot{-} \varphi_\alpha$, kde

$$\begin{aligned}
&\varphi_g(t) = (t, g(t)) \quad t \in [\alpha,\beta] \\
&\varphi_\beta(t) = (\beta, g(\beta) + t(f(\beta) - g(\beta))) \quad t \in [0,1] \\
&\varphi_f(t) = (t, f(t)) \quad t \in [\alpha,\beta] \\
&\varphi_\alpha(t) = (\alpha, g(\alpha) + t(f(\alpha) - g(\alpha))) \quad t \in [0,1]\,.
\end{aligned}$$

Věta 1.2. Buď $P : \overline{D} \mapsto \mathbb{R}$ reálná funkce spojitá na $\overline{D}$ a třídy $\mathcal{C}^1$ na D. Pak

$$\int_\varphi P\,\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Z Fubiniho věty a věty o derivaci podle parametru

$$\begin{aligned}
\int_\varphi P\,\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y &= \int_{\varphi_g} + \int_{\varphi_\beta} - \int_{\varphi_f} - \int_{\varphi_\alpha} = \int_\alpha^\beta (P(t,g(t)),0)(1,g'(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (P,0)(0,f(\beta)-g(\beta))\,\mathrm{d}t - \\
&- \int_\alpha^\beta (P(t,f(t)),0)(1,f'(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (P,0)(0,f(\alpha)-g(\alpha))\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_\alpha^\beta (P(t,g(t)) - P(t,f(t)))\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta [P(x,y)]_{g(x)}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta \left(\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$\square$

Věta 1.3. Buď $Q \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$, $Q \in \mathcal{C}^1(D)$, kde D je oblast typu $y(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [\alpha,\beta],\ g(y) < x < f(y)\}$. Buď φ konstruována jako v předchozím příkladu a $[\varphi] = \dot{D}$. Pak

$$\int_\varphi Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důkaz. $\varphi = \varphi_g \dotplus \varphi_\beta \dot{-} \varphi_f \dot{-} \varphi_\alpha$, $\varphi_g(t) = (g(t), t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, $\varphi_\beta(t) = (g(\beta) + t(f(\beta) - g(\beta)), \beta)$, $t \in [0,1]$ atd... analogicky, jako v předchozí větě. $\square$

Definice 1.4. Buď $\varphi \in \mathcal{C}^0[\alpha,\beta]$, $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto \mathbb{R}^n$. Potom φ nazveme **Jordanovou dráhou**, pokud platí

(i) $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$,
(ii) φ je na $[\alpha,\beta)$ prostá.

Jordanovy dráhy jsou tedy takové křivky, které jsou uzavřené a přitom se nikde neprotínají. Platí pro ně následující věta, která je sice „naprosto zjevná“, ale jejíž důkaz je velmi obtížný.

Věta 1.5 (Jordan)**.** Buď φ **Jordanova dráha** v $\mathbb{R}^2$. Pak lze $\mathbb{R}^2$ jednoznačně disjunktně rozloží na tři komponenty souvislosti $\mathbb{R}^2 = A \cup [\varphi] \cup B$, kde A je neomezená a B omezená. Komponentu A označíme $\operatorname{ext}\varphi$ a nazveme ji **vnějšek dráhy**, B budeme značit $\operatorname{int}\varphi$ a nazývat **vnitřek dráhy**.

Věta 1.6 (Green)**.** Buď $D = D^\circ \subset R^2$ omezená oblast, její hranice φ je kladně orientovaná Jordanova dráha po částech třídy $\mathcal{C}^1$, $P, Q \in \mathcal{C}^1(D)$, $P, Q \in \mathcal{C}^0(\overline{D})$. Potom platí

$$\int_\varphi (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta 1.7. Vnitřek Jordanovy dráhy je jednoduše souvislý. (jednoduchá souvislost viz **??**)

Poznámka. Je-li forma $\boldsymbol{\omega} = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ je uzavřená na jednoduše souvislém uzavřeném definičním oboru, z definice platí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Z Greenovy věty pak získáme

$$\int\limits_{\varphi} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint\limits_{D} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

forma $\boldsymbol{\omega}$ je tedy konzervativní.