1. Limitní přechody

Lemma 1.1. Nechť φ_0, $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $|\varphi_n| \lesssim \varphi_0$. Pak

(i) $\alpha = \liminf_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$
(ii) $\beta = \limsup_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$
(iii)
$$-\mathbf{I}\varphi_0 \leq \mathbf{I}\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \mathbf{I}\beta \leq \mathbf{I}\varphi_0.$$

Důkaz. Buďte
$$\alpha = \liminf_{k\to\infty} \varphi_k, \quad \beta = \liminf_{k\to\infty} \varphi_k.$$
$$-\varphi_0 \lesssim \alpha_m^{(n)} := \min_{n\leq k\leq m} \varphi_k, \quad \beta_m^{(n)} := \max_{n\leq k\leq m} \varphi_k \lesssim \varphi_0.$$
Zřejmě je $\alpha_m^{(n)} \in \mathcal{L}$, $\beta_m^{(n)} \in \mathcal{L}$ a
$$\alpha_m^{(n)} \searrow \alpha_n = \inf_{k\geq n} \varphi_k, \quad \beta_m^{(n)} \nearrow \beta_n = \sup_{k\geq n} \varphi_k.$$
Podle věty **??** jsou α_n a $\beta_n \in \mathcal{L}$ a současně $\alpha_n \nearrow \alpha \in \Lambda$, $\beta_n \searrow \beta \in \Lambda$. Protože $\mathbf{I}\alpha_n \leq \mathbf{I}\varphi_0$ a $\mathbf{I}\beta_n \geq -\mathbf{I}\varphi_0$, jsou i $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$. Platí: $-\varphi_0 \lesssim \alpha_n \lesssim \varphi_n \lesssim \beta_n \lesssim \varphi_0$. Integrací dostaneme
$$-\mathbf{I}\varphi_0 \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\alpha_n \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{I}\beta_n \leq \mathbf{I}\varphi_0.$$
Protože limity
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\alpha_n \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\beta_n$$
existují, vyplývá odtud již tvrzení věty. □

Věta 1.2 (Lebesgue)**.** Buď $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$ a $(\exists \varphi_0 \in \mathcal{L})(\forall n \in \mathbb{N})(|\varphi_n| \lesssim \varphi_0)$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a
$$\mathbf{I}\varphi = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n.$$

Posloupnost integrabilních funkcí je integrabilní, jestliže existuje integrabilní majoranta.

Důkaz. Vyplývá z minulé věty, pokud položíme $\limsup = \liminf$. □

Poznámka. (1) Weierstrass:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad |f_n(x)| \leq c_n,$$
analogicky
$$\int \varphi_n(x), \quad |\varphi_n(x)| \leq \varphi_0(x).$$
(2) Buď $\{\varphi_n\}_1^\infty \in \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$, $(\exists \varphi_0 \in \mathcal{L})(|\varphi| \lesssim \varphi_0)$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$.

Důkaz. φ_n se ořiznou pomocí φ_0. $\psi_n = \max(-\varphi_0, \min(\varphi_0, \varphi_n)) \in \mathcal{L}$, $|\psi_n| \leq \varphi_0$, $\varphi_n \to \varphi$, $\psi_n \to \varphi$, tedy podle předchozí věty $\varphi \in \mathcal{L}$. □

Lemma 1.3. Nechť $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi_n \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\varphi_n \leq c$ pro každé n. Pak
$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}$$
a platí
$$0 \leq \mathbf{I}\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{I}\varphi_n \leq c.$$

Důkaz. Položme
$$\alpha_m^{(n)} = \min_{n\leq k\leq m} \varphi_k \in \mathcal{L},$$
zřejmě je $\mathbf{I}\alpha_m^{(n)} \leq c$ a platí, že
$$\alpha_m^{(n)} \searrow \alpha_n = \inf_{k\geq n} \varphi_k,$$

podle věty **??** je $\alpha_n \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\alpha_n \leq c$. Protože je $\alpha_n \nearrow \alpha$, podle Leviovy věty je $\alpha \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\alpha = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}\alpha_n$. Pro $\forall n$ platí $0 \lesssim \alpha_n \lesssim \varphi_n$, tedy $0 \leq \mathbf{I}\alpha_n \leq \mathbf{I}\varphi_n \leq c$ a $0 \leq \lim \mathbf{I}\alpha_n = \mathbf{I}\alpha \leq \liminf \mathbf{I}\varphi_n \leq c$. □

Poznámka. Z existence integrabilní majoranty plyne omezenost $\mathbf{I}\varphi_n$, opačně to platit nemusí.

Věta 1.4 (Fatou)**.** Buď $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \mathcal{L}$, $\varphi_n \to \varphi$ a $\mathbf{I}\,|\varphi_n| \leq c$. Pak $\varphi \in \mathcal{L}$ a $\mathbf{I}\,|\varphi| \leq c$.

Důkaz. Položíme $\psi_n = |\varphi_n|$. Posloupnost ψ_n splňuje předpoklady předchozí věty a tedy platí, že $\mathbf{I}\,|\varphi| \leq c$. Z poznámky 1.2.2, kde bude $\varphi_0 := |\varphi| \in \mathcal{L}$ plyne, že $\varphi \in \mathcal{L}$ □

Věta 1.5. Buď L^1 množina všech tříd rozkladu $\mathcal{L}$ podle ekvivalence $\sim$ s obvykle definovanými operacemi součtu a násobení číslem. Je-li $[\varphi] \in L^1$, položme normu $\|[\varphi]\| = \mathbf{I}\,|\psi|$, kde $\psi \in [\varphi]$. Potom L^1 je normovaný lineární prostor.

Důkaz. Pro operace platí

$$[\varphi] + [\psi] = \left\{\chi \in L^1 \mid \chi = \varphi_1 + \psi_1,\ \varphi_1 \in [\varphi], \psi_1 \in [\psi]\right\},$$
$$\alpha[\varphi] = \left\{\chi \in L^1 \mid \chi = \alpha\varphi_1,\ \varphi_1 \in [\varphi]\right\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Axiomy lineárního prostoru zřejmě platí. Norma je pozitivní $\|[\varphi]\| \geq 0$ a platí, že
$\|[\varphi]\| = 0 \Rightarrow [\varphi] = [o]$ (nulová funkce). Norma je tedy skutečně normou splňující axiom pozitivní definitnosti. □

Poznámka.

(1) Prostor L^1 neobsahuje funkce, nýbrž třídy ekvivalence funkcí. Vzhledem k definici tedy neexistuje pojem funkční hodnota, neboť funkce v rámci třídy se od sebe liší na množině míry nula. Budeme-li tedy brát prvek z L^1, budeme tím mít na mysli reprezentanta dané třídy. Ne každá třída má však spojitého reprezentanta! To platí v tzv. Sobolevově prostoru.

(2) Důvod zavedení tohoto prostoru tkví v tom, že jsme takto získali prostor, z němž základní integrál generuje normu. V $\mathcal{L}$ sice normu můžeme zavést stejným způsobem, nesplňuje však třetí axiom normy — nejen nulová funkce má nulovou normu. (jedná se tedy o seminormu).

Věta 1.6 (Riesz, Fischer)**.** Prostor L^1 je Banachův (úplný normovaný vektorový prostor)

Důkaz. Vezmu posloupnost tříd $\{[\varphi_n]\}_1^\infty \subset L^1$. Nechť $\{[\varphi_n]\}_1^\infty$ je cauchyovská, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(m, n > n_0)\,(\|[\varphi_n]\| - [\varphi_m] < \varepsilon)\,.$$

Položme

$$\varepsilon = \frac{1}{2^k},$$

tedy

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k)(\forall m > n_k)\left(\|[\varphi_m] - [\varphi_{n_k}]\| < \frac{1}{2^k}\right).$$

Vytvořím z n_k rostoucí posloupnost, stačí dokázat, že konverguje vybraná posloupnost φ_{n_k}.

$$\mathbf{I}\left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right| = \left\|[\varphi_{n_{k+1}}] - [\varphi_{n_k}]\right\| \leq \frac{1}{2^k}$$

a proto

$$\mathbf{I}\sum_{k=1}^{m}\left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right| \leq 1$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$. Podle Leviho má řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right|$$

integrabilní součtovou funkci a proto skoro všude absolutně konverguje, a tedy konverguje skoro všude i řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}\right).$$

Současně platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\right)\sim\underbrace{\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}}_{\varphi}-\varphi_{n_1}.$$

Posloupnost φ_{n_k} tedy skoro všude konverguje k funkci

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}=\varphi=\varphi_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\right).$$

Dokážeme, že φ je integrabilní. Buď $k\in\mathbb{N}$ pevné, $p>k$,

$$\mathbf{I}\left|\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}\right|\leq\frac{1}{2^k},$$

$$\varphi_{n_p}-\varphi_{n_k}\to\underbrace{\varphi-\varphi_{n_k}}.$$

Podle věty 1.4 je $|\varphi-\varphi_{n_k}|\in\mathcal{L}$ a tedy $\varphi\in\mathcal{L}$ a $[\varphi]\in L^1$. Teď má smysl psát

$$\|\varphi-\varphi_{n_k}\|=\mathbf{I}\left|\varphi-\varphi_{n_k}\right|\leq\frac{1}{2^k}.$$

Sestrojili jsme tak podposloupnost, která konverguje k integrabilní funkci, tedy cauchyovská posloupnost konverguje. □

Věta 1.7. Množina $\mathcal{H}$ je v $\mathcal{L}$ hustá, tj. $\mathcal{H}\subset\mathcal{L}\wedge\mathcal{L}\subset\overline{\mathcal{H}}$.

Důkaz. Buď $\varphi\in\mathcal{L}$, $\varphi\sim f-g$, $f,g\in\mathcal{L}^+$, h_n,k_n posloupnosti $h_n\nearrow f$, $k_n\nearrow g$. Sestrojím $l_n=h_n-k_n$, pak

$$\left\|\widetilde{l_n}-[\varphi]\right\|=\mathbf{I}\left|l_n-\varphi\right|\leq\mathbf{I}\left|h_n-f\right|+\mathbf{I}\left|k_n-g\right|=(\mathbf{I}f-\mathbf{I}h_n)+(\mathbf{I}g-\mathbf{I}k_n)\to 0,$$

tedy $\mathcal{L}\subset\overline{\mathcal{H}}$. □