1. Třída Λ^+ ($\mathcal{L}^+$)

Definice 1.1. Řekneme, že funkce $f : X \mapsto \mathbb{R}^*$ je **třídy** $\Lambda^+(X)$, existuje-li $(h_n) \in \mathcal{H}$, $h_n \nearrow f$. Existuje-li navíc $c > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbf{I} h_n \leq c$, pak $f \in \mathcal{L}^+(X)$.

Poznámka. (1) Připouštíme i „zobecněné funkce" jako $f(x) = +\infty\ \forall x \in X$.
(2) $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^+(X) \subset \Lambda^+(X)$.

Věta 1.2. Funkce třídy $\mathcal{L}^+$ jsou skoro všude konečné.

Důkaz. Buď $f \in \mathcal{L}^+(X)$. Potom existuje $h_n \nearrow f$ taková, že $\mathbf{I} h_n \leq \frac{c}{2}$. Definujme

$$Z = \left\{ x \in X \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} h_n(x) = +\infty \right\},$$

dokážeme, že $\mu(Z) = 0$: Buď $h'_1 = h_1$, $h'_n = \max(h_n, h'_{n-1})$, $k_n = h'_n - h_1$. Protože $h'_n \sim h_n$, je $\mathbf{I} h'_n = \mathbf{I} h_n \leq \frac{c}{2}$, $\mathbf{I} k_n \leq c$.

Zvolím $\varepsilon > 0$, pak pro každé $x \in Z$ existuje n takové, že $k_n(x) \geq \frac{c}{\varepsilon}$. Sestrojil jsem nezápornou posloupnost $\left\{ \frac{\varepsilon}{c} k_n \right\}_1^\infty$ tak, že $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{c} k_n \geq 1$ a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I} \frac{\varepsilon}{c} k_n \leq \varepsilon,$$

takže Z je nulové míry. □

Věta 1.3. (i) Jsou-li $f, g \in \Lambda^+$, pak $f + g \in \Lambda^+$.
(ii) Jsou-li $\alpha \geq 0$, $f \in \Lambda^+$, pak $\alpha f \in \Lambda^+$.
(iii) Jsou-li $f, g \in \Lambda^+$, pak $f^+, \max(f, g), \min(f, g) \in \Lambda^+$.

Důkaz. (i) Buďte $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow g$, pak $(h_n + k_n) \nearrow f + g$. $f + g$ nemusí mít smysl, ale to se může stát pouze na množině nulové míry.
(ii) Protože $\alpha \geq 0$, platí, že $(\alpha h_n) \nearrow \alpha f$.
(iii) $\max(h_n, k_n) \nearrow \max(f, g)$, $\min(h_n, k_n) \nearrow \min(f, g)$.

□

Definice 1.4. Buď $f \in \Lambda^+(X)$. Pak definujeme

$$\mathbf{I} f = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I} h_n,$$

kde h_n je posloupnost z definice 1.1. $\mathbf{I} f$ je **integrál funkce** f **na** X.

Poznámka. (1) Pro všechna $f \in \Lambda^+$ platí $-\infty < \mathbf{I} f \leq +\infty$.
(2) $f \in \mathcal{L}^+$, právě když $f \in \Lambda^+$ a $\mathbf{I} f < +\infty$.
(3) Aby byla předchozí definice korektní, je třeba prověřit nezávislost na volbě h_n:

Důkaz. Buď $f \in \Lambda^+(X)$, $h_n \nearrow f$, $k_n \nearrow f$. Protože $f \lesssim f$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I} h_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{I} k_n.$$

Zároveň $f \gtrsim f$, takže

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I} h_n \geq \lim_{n\to\infty} \mathbf{I} k_n.$$

Na volbě h_n proto hodnota $\mathbf{I} f$ nezávisí. □

Věta 1.5. Buďte $f, g \in \Lambda^+(X)$, $\alpha \geq 0$. Pak platí
(i) $\mathbf{I}(f + g) = \mathbf{I} f + \mathbf{I} g$, má-li pravá strana smysl.
(ii) $\mathbf{I}(\alpha f) = \alpha \mathbf{I} f$, Lebesgueova konvence $0 \cdot \infty = 0$.
(iii) Je-li $f \lesssim g$, pak $\mathbf{I} f \leq \mathbf{I} g$.

Věta 1.6. Buď $\{f_n\}_1^\infty \in \Lambda^+(X)$, $f_n \nearrow f$. Pak

$$f \in \Lambda^+ \quad \text{a} \quad \mathbf{I} f = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I} f_n.$$

Důkaz. Buď $\{f_n\}_1^\infty \in \Lambda^+(X)$, existuje posloupnost $\left\{h_m^{(n)}\right\}_{m=1}^\infty \nearrow f_n$. Definujeme

$$h_m = \max_{1\leq n\leq m} h_m^{(n)}.$$

Platí, že $h_m \nearrow$ k nějakému $f^* \in \Lambda^+$. Buď $n \leq m$, pak

$$h_m^{(n)} \leq h_m \lesssim \max_{1\leq n\leq m} f_n \sim f_m \lesssim f.$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ dostáváme

$$f_n \lesssim f^* \lesssim f,$$

limitním přechodem $n \to \infty$

$$f \lesssim f^* \lesssim f,$$

tedy limitní funkce f^* je v Λ^+.

$$h_m \lesssim f_m \lesssim f.$$

Dále platí

$$\mathbf{I}h_m \leq \mathbf{I}f_m \leq \mathbf{I}f,$$

limitním přechodem $m \to \infty$

$$\mathbf{I}f^* \leq \lim_{m\to\infty} \mathbf{I}f_m \leq \mathbf{I}f$$
$$\mathbf{I}f^* = \mathbf{I}f$$

$\square$

Poznámka. Předchozí věta znamená uzavřenost tříd Λ^+ a $\mathcal{L}^+$ na operaci $\nearrow$

Věta 1.7. Nechť je $\{g_k\}_1^\infty$ posloupností funkcí z Λ^+ větších než 0 *s.v.*. Nechť $f = \sum_{k=1}^\infty g_k$. Pak $f \in \Lambda^+$ a $\mathbf{I}f = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{I}g_k$. Existuje-li navíc $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{I}\sum_{k=1}^n g_k \leq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pak $f \in \mathcal{L}^+$

Důkaz. Aplikací předchozí věty na posloupnost částečných součtů. $\square$