1. Křivkový integrál druhého druhu

Na přednášce se křivkový integrál druhého druhu definuje větou 1.7 a vynechává se zde uvedená konstrukce. Takto je to vyžadováno i na zkoušce.

Definice 1.1. Buďte g_1, g_2 dráhy v $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Dom} g_\iota = [a_\iota, b_\iota]$.

(i) Jestliže $g_1(b_1) = g_2(a_2)$, pak

$$(g_1 \dotplus g_2)(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{na } [a_1, b_1] \\ g_2(t - b_1 + a_2) & \text{na } [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

je **orientovaný součet drah g_1 a g_2.**

(ii) $(\dot{-}\, g_1)(t) = g_1(-t)$ $\forall t \in [-b_1, -a_1]$ je **opačně orientovaná dráha**.

(iii) $g_1 \dot{-}\, g_2 = g_1 \dotplus (\dot{-}\, g_2)$ je **orientovaný rozdíl drah g_1 a g_2**

Definice 1.2. Je dána dráha g. Jestliže

$$g = \dot{\sum_{i=1}^{m}} g_i,$$

pak $\sigma = (g_1, \dots, g_m)$ nazveme **rozdělením dráhy** g.

Definice 1.3. Dráha g **má délku** (je schopna rektifikace), jestliže množina

$$\left\{ l(\sigma) \,\middle|\, l(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \|g(t_i) - g(t_{i-1})\| \right\}$$

je omezená. Délka je potom $\sup_\sigma l(\sigma)$.

Poznámka. (1) Ke každému rozdělení dráhy existuje rozdělení intervalu $[a, b]$.

(2) Číslo $\|\sigma_g\| = \sup_i \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|$ nazýváme **norma rozdělení**.

Příklad.

$$g(t) = \begin{cases} -t \cos \frac{1}{t} & t \in \left[-\frac{1}{\pi}, 0\right) \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\sigma = \left(-\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{3\pi}, \dots, -\frac{1}{p\pi} \right)$$

$$l(\sigma) \geq \sum_{i=1}^{p} \left| g\left(\frac{1}{(i+1)\pi} \right) - g\left(\frac{1}{i\pi} \right) - \right| = \sum_{i=1}^{p} \left| \frac{1}{(i+1)\pi} + \frac{1}{i\pi} \right| \to +\infty$$

Definice 1.4 (křivkový integrál druhého druhu)**.** Buď g dráha v $\mathbb{R}^n$, σ její rozdělení $(g_0, \dots, g_m)$, $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální 1-forma taková, že $[g] \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$.

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma) = \sum_{i=1}^{m} \omega(x_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \text{ kde } x_i \in [g_i] \text{ pro } i \in \widehat{m}$$

nazveme **integrálním součtem** diferenciální formy $\boldsymbol{\omega}$ po dráze g při rozdělení σ.

Buď $\{\sigma\}_1^\infty$ normální posloupnost rozdělení dráhy g. Nechť pro každou takovou posloupnost existuje limita

$$\lim_{m \to \infty} \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_m) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_g \boldsymbol{\omega}.$$

Pak říkáme, že $\boldsymbol{\omega}$ je **integrabilní** po dráze g a tuto limitu nazýváme **integrálem** diferenciální formy $\boldsymbol{\omega}$ po dráze g, resp. **křivkovým integrálem druhého druhu**.

Věta 1.5. Buďte $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}$ integrabilní diferenciální formy po dráze g. Má-li jedna strana smysl, platí

(i) (aditivita)

$$\int_g (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\zeta}) = \int_g \boldsymbol{\omega} + \int_g \boldsymbol{\zeta},$$

(ii) (homogenita) $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_g (c\boldsymbol{\omega}) = c \int\limits_g \boldsymbol{\omega}.$$

Důkaz.

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma) = \sum_{i=1}^{p} \omega(x_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

Z linearity $\boldsymbol{\omega}$ v této sumě vyplývá linearita integrálu. □

Věta 1.6. Buď $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální forma. Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí

(i)

$$\int\limits_{g_1 \dotplus g_2} \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{g_1} \boldsymbol{\omega} + \int\limits_{g_2} \boldsymbol{\omega},$$

(ii)

$$\int\limits_{\dot{-} g} \boldsymbol{\omega} = -\int\limits_{g} \boldsymbol{\omega}.$$

(iii) Buď $l(g)$ délka dráhy g. Jestliže $(\forall x \in [g])(|\omega(x)| < K)$, pak

$$\left| \int\limits_g \boldsymbol{\omega} \right| \leq K l(g).$$

Důkaz. (i) Nechť existuje $\int_g \boldsymbol{\omega}$, $g = g_1 \dotplus g_2$. Předpokládejme, že $\int_{g_1} \boldsymbol{\omega}$ neexistuje. Pak existují integrální součty $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ takové, že $\mathcal{S}_1(\boldsymbol{\omega}, g_1, \sigma_1^{(m)}) \to S_1$ a $\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\omega}, g_1, \tilde{\sigma}_1^{(m)}) \to S_2$, $S_1 \neq S_2$. Vezmu g_2, $\sigma_2^{(m)}$, sjednocením získám rozdělení g, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \cup \sigma_2$ a hned vyleze spor s jednoznačností limity.

Důkaz rovnosti:

$$S(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma^{(m)}) = S(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_1^{(m)}) + S(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_2^{(m)}).$$

(ii)

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, \dot{-}\, g, \sigma^{(m)}) = \sum_{i=1}^{p} \omega(x_i)(-g(t_i) + g(t_{i-1})).$$

□

Věta 1.7 (výpočet křivkového integrálu druhého druhu)**.** Buď $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální 1-forma třídy $\mathcal{C}^0$ a g dráha třídy $\mathcal{C}^1$, $[g] \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$. Pak $\boldsymbol{\omega}$ je integrabilní po dráze g a existuje integrál

$$\int\limits_g \boldsymbol{\omega} = \int\limits_a^b \underleftarrow{\omega(g(t))}\, \overrightarrow{g'(t)} \mathrm{d}t.$$

Poznámka. (1) V integrandu se skrývá působení kovektoru na vektor, tedy skalární součin!

(2) Uvědomme si, že výraz $\overrightarrow{g'(t)}$ neznačí totální derivaci zobrazení g, nýbrž (jednořádkovou) Jacobiho matici dráhy g, tedy $\overrightarrow{g'(t)} = (\partial_1 g(t) \ldots \partial_n g(t))$. Šipka tedy značí řádkový vektor. Pro korektnost dodáváme, že je nutné jej transponovat, abychom získali vektor sloupcový. Transpozici však pro zjednodušení zápisu neuvádíme.

(3) Pojmy křivka a dráha se často libovolně zaměňují, integrál je však téměř vždy křivkový, nikoli drahový. Křivkový integrál druhého druhu je **orientovaný**, je tedy závislý na parametrizaci dráhy.

Důkaz. Platí, že $\left\|\sigma_g^{(m)}\right\| \to 0$, díky spojitosti můžeme zajistit, že $\left|\sigma^{(m)}\right| \to 0$.

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}, g, \sigma_g^{(m)}) = \sum_{i=1}^{p_m} \omega(g(\xi_i^{(m)}))(g(t_i^{(m)}) - g(t_{i-1}^{(m)})) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_m} \omega_j(g(\xi_i^{(m)}))g^{j\prime}(\eta_{ij}^{(m)})(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_m} \omega_j(g(\xi_i^{(m)}))(g^j)'(\xi_i^{(m)})(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)})}_{A_m} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_m} \omega_j(g(\xi_i^{(m)}))((g^j)'(\eta_{ij}^{(m)}) - (g^j)'(\xi_i^{(m)}))(t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)})}_{B_m}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_1)(\forall m > m_1)\left(\left|\int_a^b \omega(g(t))g'(t)\mathrm{d}t - A_m\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$(\forall \delta > 0)(\exists m_2)(\forall m > m_2)\left(\left\|\sigma^{(m)}\right\| < \delta\right)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall t', t'' \in [a,b], \forall j \in \widehat{n})\left(|t' - t''| < \delta \Rightarrow \left|(g^j)'(t') - (g^j)'(t'')\right| < \frac{\varepsilon}{2k(b-a)n}\right)$$

$$|B_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Využijeme kompaktnost $[a,b]$, spojitost g', omezenosti ω, $m > \max m_1, m_2$. □

Poznámka. Buď $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$, pak (tečka značí násobení čísel, nikoliv skalární součin)

$$\int_g \boldsymbol{\omega} = \int_a^b \mathrm{d}f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f \circ g)'(t)\,\mathrm{d}t = f(g(b)) - f(g(a)),$$

tj. integrál exaktní diferenciální formy nezávisí na průběhu dráhy, jen na počátečním a koncovém bodě.

Odsud vidíme, že určitý integrál z funkce f, tj. $\int_a^b f = f(b) - f(a)$ je vlastně křivkový integrál z 0-formy f. Z exaktnosti 0-formy poté plyne závislost pouze na koncových bodech dráhy (tj. mezích určitého integrálu).

Definice 1.8. Buď $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$, φ po částech $\in \mathcal{C}^1$, taková, že

$$\varphi = \dot{\sum_{i=1}^{m}} \varphi_i, \quad \varphi_i \in \mathcal{C}^1$$

pak (konečná aditivita)

$$\int_\varphi \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi_i} \boldsymbol{\omega}.$$

Definice 1.9. Buď $\boldsymbol{\omega}$ diferenciální forma třídy $\mathcal{C}^0$. Řekneme, že $\boldsymbol{\omega}$ je **konzervativní**, právě když pro každé dvě dráhy g_1, g_2 po částech $\mathcal{C}^1$ splňující podmínku $[g_1] \cup [g_2] \subset \mathrm{Dom}\,\boldsymbol{\omega}$, $g_1(a_1) = g_2(a_2)$, $g_1(b_1) = g_2(b_2)$ platí

$$\int_{g_1} \boldsymbol{\omega} = \int_{g_2} \boldsymbol{\omega},$$

tj. integrál závisí jen na počátečním a koncovém bodě, ne na dráze.

Poznámka. Integrál po uzavřené dráze se v matematice i fyzice často značí s kroužkem, tj.

$$\oint_g \boldsymbol{\omega}.$$

Věta 1.10. Buď $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\boldsymbol{\omega}$ je exaktní.
(ii) pro libovolnou dráhu g uzavřenou a po částech $\mathcal{C}^1$, $[g] \subset \operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$ platí $\oint_g \boldsymbol{\omega} = 0$,
(iii) $\boldsymbol{\omega}$ je konzervativní.

Důkaz. 1) $1 \Rightarrow 2$: Buď $\omega = \mathrm{d}f$,

$$g = \sum_{i=1}^{p} g_i$$

libovolná dráha po částech $\mathcal{C}^1$, $g_i \in \mathcal{C}^1$.

$$\int_g \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{p} \int_{g_i} \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{p} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_p) - f(x_0).$$

Platí

$$x_p = x_0 \Rightarrow \oint_g \boldsymbol{\omega} = 0.$$

2) $2 \Rightarrow 3$: Buďte g_1, g_2 libovolné po částech $\mathcal{C}^1$, stejnými počátečními a koncovými body, definujme $g = g_1 \dot{-} g_2$. Pak

$$0 = \oint_g \boldsymbol{\omega} = \int_{g_1} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_2} \boldsymbol{\omega}.$$

3) $3 \Rightarrow 1$: Definiční obor nemusí být souvislý a proto se rozdělí na jednotlivé komponenty souvislosti a pro každou se definuje funkce f zvlášť. Buď A souvislá podmnožina $\operatorname{Dom} \boldsymbol{\omega}$, zvolím pevně $x_0 \in A$. Když si zvolím jiný bod, výsledná funkce se liší o konstantu (křivkový integrál z $\boldsymbol{\omega}$ mezi původním a novým bodem). V $\mathbb{R}^n$ (lineární prostor) je každá oblast lokálně lineárně souvislá a lze v ní každé dva body spojit lomenou čarou: $x \in A$; $[g_x] \subset A$.

Definujme $f(x) = \int_{g_x} \boldsymbol{\omega}$ (definice je jednoznačná, neboť $\boldsymbol{\omega}$ je konzervativní). f je reálná funkce na A, dokážeme, že $f'(x) = \omega(x)$:

$$f_i(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{e_i}) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{g_{(x+t\vec{e_i})}} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_x} \boldsymbol{\omega} \right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\underbrace{\int_{g_{(x+t\vec{e_i})}} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_x} \boldsymbol{\omega} - \int_{g_i} \boldsymbol{\omega}}_{\text{uzavřená dráha}} + \int_{g_i} \boldsymbol{\omega} \right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{g_i} \boldsymbol{\omega} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega(x + \tau\vec{e_i})\vec{e_i} \, \mathrm{d}\tau = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{\omega_i(x + \tau\vec{e_i})}_{\text{spojité}} \, \mathrm{d}\tau = \omega_i(x)$$

$g_{(x+t\vec{e_i})}$ je libovolná křivka z bodu x_0 do $x + t\vec{e_i}$, nemusí se s g_x shodovat v jediném bodě. Poslední krok plyne z věty o střední hodnotě. (Případně se na to dá nahlížet jako na derivaci integrálu jako funkce horní meze v bodě 0, stačí si domyslet odečtení integrálu od 0 do 0.) $\omega_i(x)$ je spojité a f má tedy spojité parciální derivace a proto je diferencovatelná, takže $\omega_i(x) = f_i(x)$, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$. $\square$

Poznámka. (1) V případě, že $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^1$ na jednoduše souvislé množině, je s uvedenými tvrzeními ekvivalentní i (iv) $\boldsymbol{\omega}$ je uzavřená.

(2) Z Riezsovy věty: $\underset{\leftarrow}{\omega}(x)\vec{h} = \left\langle \vec{F}, \vec{h} \right\rangle$ víme, že pro každou složku ω_i existuje složka F^i v eukleidovském standardním skalárním součinu (zvednutí indexu přes jednotkovou matici).

(3) Nechť $\cdot$ značí standardní skalární součin a $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)^T$. Práci po dráze g lze vyjádřit

$$A = \int_g \boldsymbol{\omega} = \int_g \sum_{i=1}^{3} \omega_i \,\mathrm{d}x^i = \int_g \sum_{i=1}^{3} F^i \,\mathrm{d}x^i = \int_g \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

(4) Pole je konzervativní (a práce nezávisí na dráze), právě když diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ je konzervativní.

(5) Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$, taková, že $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$, je konzervativní, právě když existuje funkce f taková, že $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f = f'$.

(6) Říkáme, že vektorové pole $\vec{F}(\vec{r})$ je konzervativní, pokud existuje $\operatorname{grad} U(x)$ tak, že $\operatorname{grad} U(x) = \vec{F}(\vec{r})$. Jinými slovy, $\vec{F}(\vec{r})$ má potenciál $U(x)$.