# 1. Vázané extrémy

**Definice 1.1.** Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0 \in M$ **lokální extrém vzhledem k varietě** $M$, právě když

$$(\exists \mathrm{H}_{x_0})(\forall x \in \mathrm{H}_{x_0} \cap M)(f(x) \geq f(x_0)), \text{ resp. } (\exists \mathrm{H}_{x_0})(\forall x \in \mathrm{H}_{x_0} \cap M)(f(x) \leq f(x_0)).$$

**Věta 1.2** (nutná podmínka pro existenci extrému vzhledem k varietě)**.** Buď $M$ $r$-rozměrná varieta třídy $\mathcal{C}^1$, $x_0 \in M$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reálná funkce diferencovatelná v $x_0$. Nechť $f$ má v $x_0$ lokální extrém vzhledem k varietě $M$. Potom existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ taková, že $x_0$ je stacionárním bodem funkce

$$\Lambda = f - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \Phi^l$$

při značení z kapitoly 17. Čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se nazývají **Lagrangeovy multiplikátory** a $\Lambda$ **Lagrangeova funkce**.

*Důkaz.* Pro každý $\vec{h} \in T_{x_0}M$ existuje $\psi : \mathbb{R} \to M$ takové, že $\psi(0) = x_0$ a $\psi'(0) = \vec{h}$. Definujme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vztahem $\varphi = f \circ \psi$. BÚNO nechť $f$ má v $x_0$ maximum, tedy:

$$(\exists \mathrm{H}_{x_0})(\forall x \in \mathrm{H}_{x_0} \cap M)(f(x) \leq f(x_0)) \Leftrightarrow (\exists \mathrm{H}_0)(\forall t \in \mathrm{H}_0)(f(\psi(t)) \leq f(\psi(0)))$$

tedy $\varphi$ má v 0 maximum. Pak $\varphi'(0) = 0$, a platí

$$0 = \varphi'(0) = f'(x_0) \cdot \psi'(0) = f'(x_0)\vec{h} = \left\langle \operatorname{grad} f(x_0), \vec{h} \right\rangle = 0.$$

Z toho dále vyplývá, že $\operatorname{grad} f(x_0) \in N_M(x_0)$ a dále existence $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takových, že

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \operatorname{grad} \Phi^l(x_0),$$

a tedy

$$\operatorname{grad} \left( f - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \Phi^l \right) = 0$$

a z Rieszovy věty pak vyplývá nulovost derivace $\Lambda$. □

*Poznámka.* Derivace vzhledem k varietě: $f'_M(x_0) = f'(x_0)|_{T_{x_0}M}$, tj. derivace zúžená na tečný prostor.

**Věta 1.3** (postačující podmínka)**.** Buď $M$ varieta třídy $\mathcal{C}^2$, nechť existuje $f''(x_0)$, $x_0 \in M$, existuje $\Lambda$ a $\Lambda'(x_0) = 0$. Potom

(i) Má-li funkce $f|_M$ v $x_0$ lokální minimum, potom $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} \geq 0$.
(ii) Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} > 0$, má $f|_M$ v $x_0$ ostré lokální minimum.
(iii) Má-li funkce $f|_M$ v $x_0$ lokální maximum, potom $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} \leq 0$.
(iv) Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M} < 0$, má $f|_M$ v $x_0$ ostré lokální maximum.
(v) Je-li $\Lambda''(x_0)|_{T_{x_0}M}$ indefinitní, nemá $f|_M$ v $x_0$ lokální extrém.

*Důkaz.* (i) Buď $\vec{h} \in T_{x_0}M$. Potom existuje $\psi : \mathbb{R} \to M$ takové, že $\psi(0) = x_0$, $\psi'(0) = \vec{h}$. Provedeme Taylorův rozvoj $\Lambda$ v $x_0$ do druhého řádu (to můžeme, protože $f''(x_0)$ existuje a $M \in \mathcal{C}^2$)

$$\Lambda(x) = \Lambda(x_0) + \underbrace{\Lambda'(x_0)(x - x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(x - x_0)^2 + \omega(x) \left\| x - x_0 \right\|^2,$$

$$\Lambda(\psi(t)) = \Lambda(x_0) + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(\psi(t) - \psi(0))^2 + \omega(\psi(t)) \left\| \psi(t) - \psi(0) \right\|^2.$$

Protože $\psi(t)$ je z variety, kde splývá $f$ s $\Lambda$, vyjde

$$\frac{1}{t^2} \left( f(\psi(t)) - f(\psi(0)) - \omega(\psi(t)) \left\| \psi(t) - \psi(0) \right\|^2 \right) = \frac{1}{2}\Lambda''(\psi(0)) \left( \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \right)^2.$$

Limitním přechodem $t \to 0$ dostáváme

$$\frac{1}{t^2} \underbrace{f(\psi(t)) - f(\psi(0))}_{\geq 0} = \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h}^2.$$

(ii) Buď $\Lambda''(x_0)\vec{h}^2 > 0$, $x \in M \cap H$. Potom

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)(x - x_0)^2 + \omega(x) \left\| x - x_0 \right\|^2.$$

Problém je v tom, že $x - x_0$ nemusí být obecně z $T_{x_0}M$. Položme $\vec{h} = x - x_0$, potom $\vec{h}$ lze vyjádřit jako $\vec{h} = \vec{h_1} + \vec{h_2}$, kde $\vec{h_1} \in T_{x_0}M$, $\vec{h_2} \in N_M(x_0)$. Potom z pozitivní definitnosti $\Lambda''$ vyplývá

$$\Lambda''(x_0)\vec{h_1}^2 \geq \alpha \left\| \vec{h_1} \right\|^2$$

pro nějaké $\alpha > 0$, neboť $\vec{h_1} \in T_{x_0}M$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h_1}^2 + \Lambda''(x_0)\vec{h_1}\vec{h_2} + \frac{1}{2}\Lambda''(x_0)\vec{h_2}^2 + \omega(x) \left\| \vec{h_1} + \vec{h_2} \right\|^2 \geq \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \left\| \vec{h_1} \right\|^2 - \frac{\alpha}{8} \left\| \vec{h} \right\|^2 \geq \frac{\alpha}{4} \left\| \vec{h} \right\|^2 - \frac{\alpha}{8} \left\| \vec{h} \right\|^2 = \frac{\alpha}{8} \left\| \vec{h} \right\|^2, \end{aligned}$$

neboť

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\left\| \vec{h_2} \right\|}{\left\| \vec{h} \right\|} = 0, \quad \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\left\| \vec{h_1} \right\|}{\left\| \vec{h} \right\|} = 1$$

a

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{1}{\left\| \vec{h} \right\|^2} \left( \Lambda''(x_0)\vec{h_1}\vec{h_2} + \frac{1}{2}\Lambda''\vec{h_2}^2 + \omega(x) \left\| \vec{h} \right\|^2 \right) = 0,$$

takže lze zvolit takové $\alpha > 0$, aby

$$\frac{1}{\left\| \vec{h} \right\|^2} \left( \Lambda''(x_0)\vec{h_1}\vec{h_2} + \frac{1}{2}\Lambda''\vec{h_2}^2 + \omega(x) \left\| \vec{h} \right\|^2 \right) \leq \frac{\alpha}{8}.$$

Konečně díky ortogonalitě $\vec{h_1}$ a $\vec{h_2}$

$$\left\| \vec{h_1} \right\|^2 = \left\| \vec{h} \right\|^2 - \left\| \vec{h_2} \right\|^2 \wedge \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\left\| \vec{h_2} \right\|}{\left\| \vec{h} \right\|} = 0 \Rightarrow \left\| \vec{h_1} \right\|^2 \geq \frac{1}{2} \left\| \vec{h} \right\|^2.$$

□

*Poznámka.* Metodika hledání extrémů:

(1) Nechť $f$, $\Phi^1, \dots, \Phi^m \in \mathcal{C}^2$.
(2) Ověříme, zda $M = \{x \in \mathbb{R}^n | \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \Phi(x) = 0 \wedge \mathrm{h}(\Phi'(x)) = m\}$, tj. je varieta.
(3) Sestavím funkční předpis

$$\Lambda = f - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \Phi^l,$$

kde $\lambda$ zatím neznám.
(4) Položím $\Lambda'(x_0) = \Theta$, $\Lambda_j(x_0) = 0$ pro $j \in \widehat{n}$, $\Phi^l(x_0) = 0$ pro $l \in \widehat{m}$. Dostanu $m + n$ rovnic pro $m + n$ neznámých.
(5) Vyberu si jeden bod $x_0$, určím $\lambda_j$ a dosadím do $\Lambda$.
(6) $\Lambda''(x_0)\vec{h}^2 = Q(\vec{h})$.
(7) Pokud je $Q(\vec{h})$ PD nebo ND, pak je to minimum, případně maximum.
(8) Jinak musím nalézt tečný prostor ($T_{x_0}M = \ker \Phi'(x_0)$) a zúžím $Q(\vec{h})$ na $T_{x_0}M$.

Tedy nalézám $q(\vec{h}) = Q(\vec{h})|_{T_{x_0}M}$. $\Phi'(x_0)\vec{h} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i^l(x_0)\vec{h}^i = 0 \text{ pro } l \in \widehat{m}.$$

Prověřím definitnost $Q$. Je nutno hlídat dimenze.

*Poznámka.* Důkaz nerovnosti $f(x) \leq g(x)$: $f(x) = a$ je varieta, např. uzavřená dráha. Najdu extrém $g(x)$ na varietě $f(x) = a$, to provedu pro každé $a$.