1. Regulární zobrazení

Připomeneme si Banachovu větu o pevném bodě:

(1) Zobrazení $f : (X, \varrho) \to (X, \varrho)$ se nazývá **kontrahující**, právě když

$$(\exists k \in (0,1))(\forall x, y \in X)(\varrho(f(x), f(y)) \leq k\varrho(x, y)).$$

(2) Každé kontrahující zobrazení na úplném prostoru má právě jeden pevný bod, tj. existuje takové x, že platí $f(x) = x$.

Věta 1.1 (o inverzním zobrazení)**.** Nechť $q \in \mathbb{N}$, $g : E \to E \in \mathcal{C}^q$, $t_0 \in (\operatorname{Dom} g)^\circ$, $\det g'(t_0) \neq 0$. Potom existuje $\mathrm{H}_{t_0} = (\mathrm{H}_{t_0})^\circ$ takové, že

(i) zúžení $g|_{\mathrm{H}_{t_0}}$ je prosté,
(ii) $U = g(\mathrm{H}_{t_0}) = U^\circ$, tj. obraz otevřeného okolí je otevřený,
(iii) $f = (g|_{\mathrm{H}_{t_0}})^{-1} \in \mathcal{C}^q$.

Důkaz. Buď $x_0 = g(t_0)$, $x = g(t)$. Pak $x - g(t) = 0$, $t = x + (t - g(t)) = \varphi_x(t)$.

I) Předpokládejme, že $g'(t_0) \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{E})$, $g'(t_0) = \mathrm{id}_E$

$$\varphi'_x(t_0) = \mathrm{id}_{\vec{E}} - g'(t_0) = \underset{\leftarrow}{0}$$

$$\left|\varphi^i_x(t_2) - \varphi^i_x(t_1)\right| = \left|(\varphi^i_x)'(\xi)(t_2 - t_1)\right|$$

S využitím spojitosti g existuje $\overline{B}(t_0, r)$ taková, že $(\forall t \in B)\, \|\varphi'_x(t)\| \leq k \in (0,1)$ a zároveň $\overline{B}$ je úplný prostor (je uzavřená v úplném prostoru).

Musíme ještě ověřit, zda $\varphi_x : \overline{B}(t_0, r) \to \overline{B}(t_0, r)$.

$$\begin{aligned}\|\varphi_x(t) - t_0\| &= \|x + t - g(t) - (x_0 + t_0 - g(t_0))\| = \\ &= \|(x - x_0) + (x + t - g(t)) - (x + t_0 - g(t_0))\| \leq \\ &\leq \|x - x_0\| + \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t_0)\| \leq (1-k)r + kr \leq r\end{aligned}$$

Jestliže je $x \in B(x_0, (1-k)r)$, pak φ_x na $\overline{B}(t_0, r)$ kontrahuje a φ_x je $\overline{B} \to \overline{B}$. Z toho vyplývá, že má právě jeden pevný bod pro každé $x \in B(x_0, (1-k)r)$ a tedy zvolím-li si $x \in B$, pak existuje právě jedno $t \in B(t_0, r)$ tak, že platí $x = g(t)$. Tedy $g|_{\mathrm{H}}$ je prosté.

Definujeme tímto zobrazení $f(x) = t$. Nejprve ukážeme spojitost f.

$$\begin{aligned}\|g(t_2) - g(t_1)\| &= \|x + t_2 - \varphi_x(t_2) - (x + t_1 - \varphi_x(t_1))\| \geq \\ &\geq \|t_2 - t_1\| - \|\varphi_x(t_2) - \varphi_x(t_1)\| \geq (1-k)\|t_2 - t_1\|\end{aligned}$$

a tedy pro každé $x_1, x_2 \in g(\mathrm{H})$ platí:

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \frac{1}{1-k}\|x_2 - x_1\|,$$

tedy zobrazení f je lipschitzovské, tedy i spojité. Vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení je otevřený. Proto $U = g(\mathrm{H}) = f^{-1}(\mathrm{H}) = U^\circ$. Zbývá dokázat, že $f = (g|_{\mathrm{H}})^{-1} \in \mathcal{C}^q$.

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \mu(t)\|t - t_0\|$$

$$x - x_0 = g'(t_0)(f(x) - f(x_0)) + \mu(f(x))\|f(x) - f(x_0)\|$$

$$f(x) - f(x_0) = (g'(t_0))^{-1}(x - x_0) - (g'(t_0))^{-1}(\mu(f(x))\|f(x) - f(x_0)\|)$$

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\|x - x_0\| + \left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\|\mu(f(x))\|\|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \frac{\left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\|x - x_0\|}{1 - \|(g'(t_0))^{-1}\|\|\mu(f(x))\|}$$

a tedy

$$f(x) = f(x_0) + (g'(t_0))^{-1}(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\|$$

a

$$\|\omega(x)\| \leq \left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|\|\mu(f(x))\| \frac{\left\|(g'(t_0))^{-1}\right\|}{1 - \|(g'(t_0))^{-1}\|\|\mu(f(x))\|}$$

Existuje $f'(x_0) = (g'(t_0))^{-1}$. Pro $x \in U$, $t \in \mathrm{H}$
$$f'(x) = (g'(t))^{-1}$$

II) Pokud $g'(t_0) \neq \mathrm{id}_{\vec{E}}$: Definujeme
$$h(x) = x_0 - g'(t_0)^{-1}(x - x_0).$$
Platí, že $G = (h \circ g) \in \mathcal{C}^q$, $G(t_0) = x_0$, $G'(t_0) = (h \circ g)'(t_0) = (g'(t_0))^{-1} \circ g'(t_0) = \mathrm{id}_{\vec{E}}$. □

Poznámka. (1) $g^{-1} = f$ (funkce k sobě inverzní)
(2) $\mathbb{J}f(x_0) = (\mathbb{J}g(t_0))^{-1}$ (Jacobiho matice k sobě inverzní)
(3) $\det f'(x_0) = \frac{1}{\det g'(t_0)}$ (determinanty k sobě inverzní)

Definice 1.2. Buď g zobrazení třídy alespoň $\mathcal{C}^1$ pro každé $t \in \operatorname{Dom} g$. Nechť $\det g'(t) \neq 0$ (tj. g má regulární derivaci). Pak řekneme, že g je **regulární**.

Poznámka. Regulární zobrazení splňuje předpoklady 1.1, takže je **lokálně prosté**, tj. $(\forall t)(\exists \mathrm{H}_t)$ takové, že g je na něm prosté.

Definice 1.3. Zobrazení $g : E \to E$ se nazývá **difeomorfismus**, resp. **q-difeomorfismus**, platí-li
(I) g je prosté,
(II) g i g^{-1} jsou třídy $\mathcal{C}^1$ resp. $\mathcal{C}^q$.

Poznámka. (1) Regulární zobrazení je **lokálně difeomorfní**.
(2) Homeomorfismus je 0-difeomorfismus.

Definice 1.4. Zobrazení g se nazývá **otevřené**, platí-li
$$(A \subset \operatorname{Dom} g \wedge A = A^\circ) \Rightarrow g(A) = g(A)^\circ.$$

Věta 1.5. Je-li g regulární, je otevřené.

Důkaz. Vezměme si libovolnou otevřenou množinu A, která leží v definičním oboru g; chceme ukázat, že $g(A)$ je otevřená množina. Zvolme libovolné $x_0 \in g(A)$. Hledáme nějaké jeho okolí, které by patřilo do $g(A)$. Označme t_0 bod splňující $t_0 \in A$ a zároveň $g(t_0) = x_0$. Na zobrazení $g|_A$ můžeme aplikovat větu 1.1. Z ní dostaneme, že existuje otevřené okolí bodu t_0 splňující $H_{t_0} \subset A$, jehož obraz $g(H_{t_0})$ je opět otevřený. Přitom ale zjevně $x \in g(H_{t_0}) \subset g(A)$. Nalezli jsme tedy okolí bodu x_0 ležící v $g(A)$. □

Poznámka. Zobrazení regulární a prosté je difeomorfní.