

1. REGULÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Připomeneme si Banachovu větu o pevném bodě:

- (1) Zobrazení $f : (X, \varrho) \rightarrow (X, \varrho)$ se nazývá **kontrahující**, právě když $(\exists k \in (0, 1))(\forall x, y \in X)(\varrho(f(x), f(y)) \leq k\varrho(x, y)).$
- (2) Každé kontrahující zobrazení na úplném prostoru má právě jeden pevný bod, tj. existuje takové x , že platí $f(x) = x.$

Věta 1.1 (o inverzním zobrazení). Nechť $q \in \mathbb{N}$, $g : E \rightarrow E \in \mathcal{C}^q$, $t_0 \in (\text{Dom } g)^\circ$, $\det g'(t_0) \neq 0$. Potom existuje $H_{t_0} = (H_{t_0})^\circ$ takové, že

- (i) zúžení $g|_{H_{t_0}}$ je prosté,
- (ii) $U = g(H_{t_0}) = U^\circ$, tj. obraz otevřeného okolí je otevřený,
- (iii) $f = (g|_{H_{t_0}})^{-1} \in \mathcal{C}^q$.

Důkaz. Buď $x_0 = g(t_0)$, $x = g(t)$. Pak $x - g(t) = 0$, $t = x + (t - g(t)) = \varphi_x(t)$.

I) Předpokládejme, že $g'(t_0) \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{E})$, $g'(t_0) = \text{id}_{\vec{E}}$

$$\varphi'_x(t_0) = \text{id}_{\vec{E}} - g'(t_0) = \underset{\leftarrow}{0}$$

$$|\varphi_x^i(t_2) - \varphi_x^i(t_1)| = |(\varphi_x^i)'(\xi)(t_2 - t_1)|$$

S využitím spojitosti g existuje $\overline{B}(t_0, r)$ taková, že $(\forall t \in B)\|\varphi_x(t)\| \leq k \in (0, 1)$ a zároveň \overline{B} je úplný prostor (je uzavřená v úplném prostoru).

Musíme ještě ověřit, zda $\varphi_x : \overline{B}(t_0, r) \rightarrow \overline{B}(t_0, r)$.

$$\begin{aligned} \|\varphi_x(t) - t_0\| &= \|x + t - g(t) - (x_0 + t_0 - g(t_0))\| = \\ &= \|(x - x_0) + (x + t - g(t)) - (x + t_0 - g(t_0))\| \leq \\ &\leq \|x - x_0\| + \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t_0)\| \leq (1 - k)r + kr \leq r \end{aligned}$$

Jestliže je $x \in B(x_0, (1 - k)r)$, pak φ_x na $\overline{B}(t_0, r)$ kontrahuje a φ_x je $\overline{B} \rightarrow \overline{B}$. Z toho vyplývá, že má právě jeden pevný bod pro každé $x \in B(x_0, (1 - k)r)$ a tedy zvolím-li si $x \in B$, pak existuje právě jedno $t \in B(t_0, r)$ tak, že platí $x = g(t)$. Tedy $g|_H$ je prosté.

Definujeme tímto zobrazení $f(x) = t$. Nejprve ukážeme spojitosť f .

$$\begin{aligned} \|g(t_2) - g(t_1)\| &= \|x + t_2 - \varphi_x(t_2) - (x + t_1 - \varphi_x(t_1))\| \geq \\ &\geq \|t_2 - t_1\| - \|\varphi_x(t_2) - \varphi_x(t_1)\| \geq (1 - k)\|t_2 - t_1\| \end{aligned}$$

a tedy pro každé $x_1, x_2 \in g(H)$ platí:

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \frac{1}{1 - k} \|x_2 - x_1\|,$$

tedy zobrazení f je lipschitzovské, tedy i spojité. Vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení je otevřený. Proto $U = g(H) = f^{-1}(H) = U^\circ$. Zbývá dokázat, že $f = (g|_H)^{-1} \in \mathcal{C}^q$.

$$\begin{aligned} g(t) &= g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0) + \mu(t)\|t - t_0\| \\ x - x_0 &= g'(t_0)(f(x) - f(x_0)) + \mu(f(x))\|f(x) - f(x_0)\| \\ f(x) - f(x_0) &= (g'(t_0))^{-1}(x - x_0) - (g'(t_0))^{-1}(\mu(f(x))\|f(x) - f(x_0)\|) \\ \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|(g'(t_0))^{-1}\| \|x - x_0\| + \|(g'(t_0))^{-1}\| \|\mu(f(x))\| \|f(x) - f(x_0)\| \\ \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \frac{\|(g'(t_0))^{-1}\| \|x - x_0\|}{1 - \|(g'(t_0))^{-1}\| \|\mu(f(x))\|} \end{aligned}$$

a tedy

$$f(x) = f(x_0) + (g'(t_0))^{-1}(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\|$$

a

$$\|\omega(x)\| \leq \|(g'(t_0))^{-1}\| \|\mu(f(x))\| \frac{\|(g'(t_0))^{-1}\|}{1 - \|(g'(t_0))^{-1}\| \|\mu(f(x))\|}$$

Existuje $f'(x_0) = (g'(t_0))^{-1}$. Pro $x \in U, t \in H$

$$f'(x) = (g'(t))^{-1}$$

II) Pokud $g'(t_0) \neq \text{id}_{\vec{E}}$: Definujeme

$$h(x) = x_0 - g'(t_0)^{-1}(x - x_0).$$

Platí, že $G = (h \circ g) \in \mathcal{C}^q$, $G(t_0) = x_0$, $G'(t_0) = (h \circ g)'(t_0) = (g'(t_0))^{-1} \circ g'(t_0) = \text{id}_{\vec{E}}$. \square

Poznámka. (1) $g^{-1} = f$ (funkce k sobě inverzní)
 (2) $\mathbb{J}f(x_0) = (\mathbb{J}g(t_0))^{-1}$ (Jacobiho matice k sobě inverzní)
 (3) $\det f'(x_0) = \frac{1}{\det g'(t_0)}$ (determinanty k sobě inverzní)

Definice 1.2. Bud' g zobrazení třídy alespoň \mathcal{C}^1 pro každé $t \in \text{Dom } g$. Nechť $\det g'(t) \neq 0$ (tj. g má regulární derivaci). Pak řekneme, že g je **regulární**.

Poznámka. Regulární zobrazení splňuje předpoklady 1.1, takže je **lokálně prosté**, tj. $(\forall t)(\exists H_t)$ takové, že g je na něm prosté.

Definice 1.3. Zobrazení $g : E \rightarrow E$ se nazývá **difeomorfismus**, resp. **q -difeomorfismus**, platí-li

- (I) g je prosté,
- (II) g i g^{-1} jsou třídy \mathcal{C}^1 resp. \mathcal{C}^q .

Poznámka. (1) Regulární zobrazení je **lokálně difeomorfní**.
 (2) Homeomorfismus je 0-difeomorfismus.

Definice 1.4. Zobrazení g se nazývá **otevřené**, platí-li

$$(A \subset \text{Dom } g \wedge A = A^\circ) \Rightarrow g(A) = g(A)^\circ.$$

Věta 1.5. Je-li g regulární, je otevřené.

Důkaz. Vezměme si libovolnou otevřenou množinu A , která leží v definičním oboru g ; chceme ukázat, že $g(A)$ je otevřená množina. Zvolme libovolné $x_0 \in g(A)$. Hledáme nějaké jeho okolí, které by patřilo do $g(A)$. Označme t_0 bod splňující $t_0 \in A$ a zároveň $g(t_0) = x_0$. Na zobrazení $g|_A$ můžeme aplikovat větu 1.1. Z ní dostaneme, že existuje otevřené okolí bodu t_0 splňující $H_{t_0} \subset A$, jehož obraz $g(H_{t_0})$ je opět otevřený. Přitom ale zjevně $x \in g(H_{t_0}) \subset g(A)$. Nalezli jsme tedy okolí bodu x_0 ležící v $g(A)$. \square

Poznámka. Zobrazení regulární a prosté je difeomorfní.