1. Metrika

Touto kapitolou dle Vrány začíná „látka z druhého ročníku“. Na úvod si připomeneme základní definici z lineární algebry. Z té se samozřejmě nezkouší, ale je vhodné ji porovnat s následujícími definicemi.

Definice 1.1. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, buď definováno zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ takové, že platí:

(I) pozitivní definitnost: $\forall \vec{x} \in V \ \ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, přičemž $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
(II) hermitovskost: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \ \ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$,
(III) levá linearita: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \ \langle \lambda\vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$,

pak zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazveme **skalární součin** a dvojici $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazveme **pre-Hilbertův prostor**.

Definice 1.2. Buď V vektorový prostor nad T, buď definováno zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že platí:

(I) pozitivní definitnost: $\forall \vec{x} \in V \ \ \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
(II) pozitivní homogenita: $\forall \vec{x} \in V, \forall \lambda \in T \ \ \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \ \|\vec{x}\|$,
(III) trojúhelníková nerovnost: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \ \ \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$,

pak zobrazení $\|\cdot\|$ nazveme **normou** na prostoru V a dvojici $(V, \|\cdot\|)$ nazveme **normovaný lineární prostor**. Není-li splněn axiom (I), zobrazení nazýváme **seminormou**.

Poznámka. Příklady norem:

(1) Norma indukovaná skalárním součinem: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.
(2) Norma indukovaná lineárním funkcionálem φ: $\|\vec{x}\| = |\varphi(\vec{x})|$
(3) Maximová norma: $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_i \{|x_i|\}$
(4) Supremová norma: $\|f\|_\infty = \sup\limits_x \{|f(x)|\}$
(5) p–norma: $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\dim V} |x_i|^p \right)^{1/p}$ $\quad \forall p \geq 1$ — pro $p \in (0,1)$ není splněn axiom (III).
(6) Položíme-li v definici p–normy $p = 1$, získáme součtovou normu. [1]
(7) Položíme-li v definici p–normy $p = 2$, získáme eukleidovskou normu (normu indukovanou standardním skalárním součinem).

Pro p–normy dále platí

(i) $\lim_{p \to +\infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$
(ii) $(\forall p < q)(\forall \vec{x} \in V)(\|\vec{x}\|_p \geq \|\vec{x}\|_q)$

Poznámka. Norma na prostoru funkcí indukovaná skalárním součinem z poznámky **??.??** nesplňuje axiom (I), je to tedy seminorma. Abychom získali normu, stačí pouze namísto Riemannova integrálu mínit integrál Lebesgueův. Korektní zavedení této normy na prostoru funkcí je náplní MAA4.

Definice 1.3. Buď X neprázdná množina, na níž je definováno zobrazení $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že platí:

(I) totožnost: $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$,
(II) symetrie: $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad \forall x, y \in X$,
(III) trojúhelníková nerovnost: $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$,

pak zobrazení ϱ nazveme **metrikou** na množině X a dvojici (X, ϱ) nazveme **metrický prostor**. Prvky nosné množiny se nazývají **body** a $\varrho(x, y)$ nazýváme **vzdálenost bodů** x, y.

[1] V anglické literatuře se nazývá též *taxicab* norma, resp. manhattanská norma. Jméno je odvozené z toho, jakou vzdálenost musí ujet taxikář v manhattanské obdélníkové síti ulic.

Poznámka. (1) Na množině X není definován součet prvků, stačí nám definovat jejich vzdálenost pomocí metriky.
(2) Na každé množině lze zavést metriku — přinejmenším tzv. diskrétní metrika, která poskytuje pouze rozlišovací schopnost:
$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$
(3) Norma automaticky indukuje metriku $\varrho(x,y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Tímto způsobem získáme metriku maximovou, eukleidovskou, součtovou, atd.
(4) Metrický prostor už nemusí mít strukturu vektorového prostoru. Pro zdůraznění linearity užíváme pojmu *lineární* prostor namísto vektorového a zapisujeme $\overrightarrow{X}$ místo X. Navíc se tímto odliší lineární prostor od afinního **??**.
(5) Každý pre-Hilbertův prostor je normovaný a každý normovaný prostor je metrický.

Definice 1.4. Buď (X,ϱ) metrický prostor. Potom definujeme:
(i) $\forall A \subset X : \mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \varrho(x,y)$ — **průměr množiny**
(ii) $\forall A, B \subset X : \mathrm{dist}(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} \varrho(x,y)$ — **vzdálenost množin**

Říkáme, že množina $A \subset X$ je omezená, právě když $\mathrm{diam}(A) < +\infty$.

Poznámka. Jelikož $\sup \emptyset = -\infty$, definuje se někdy průměr prázdné množiny explicitně jako $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$. Zobrazení diam je tedy nezáporné na potenční množině $\mathcal{P}(X)$, tj. $\forall A \subset X\ 0 \leq \mathrm{diam}(A) \leq +\infty$. S definicí vzdálenosti množin podobný problém nemáme, neboť $\inf \emptyset = +\infty$.

Definice 1.5. Buď (X,ϱ) metrický prostor, $A \subset X$. Vzdálenost bodu $x \in X$ od množiny A definujeme jako $\mathrm{dist}(x,A) = \mathrm{dist}(\{x\},A)$.

Věta 1.6. Buď (X,ϱ) metrický prostor. Pak platí:
(i) $\forall x,y \in X, \forall A \subset X \quad \mathrm{dist}(x,A) \leq \varrho(x,y) + \mathrm{dist}(y,A)$
(ii) $\forall x,y \in X, \forall A \subset X \quad |\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leq \varrho(x,y)$
(iii) $\forall x \in X, \forall A,B \subset X \quad \mathrm{dist}(x, A\cup B) = \min\{\mathrm{dist}(x,A), \mathrm{dist}(x,B)\}$
(iv) $\forall x \in X, \forall A \subset X \quad x \in A \Rightarrow \mathrm{dist}(x,A) = 0$

Důkaz. Plyne z vlastností infima a metriky ϱ. □

Poznámka. Zobrazení $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ obecně není metrikou potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Pokud totiž pro dvě různé množiny $A,B \subset X$ platí $A \cap B \neq \emptyset$, pak $\mathrm{dist}(A,B) = 0$, ale množiny A,B nejsou identické. Obecně tedy metrika představuje vzdálenost, ale vzdálenost nemusí být metrikou.

Definice 1.7. Buď (X,ϱ) metrický prostor, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$. Potom
(I) **otevřenou koulí** rozumíme množinu $B(x,r) = \{y \in X \mid \varrho(y,x) < r\}$,
(II) **uzavřenou koulí** rozumíme množinu $S(x,r) = \{y \in X \mid \varrho(y,x) \leq r\}$.

Poznámka. (1) Prostor je omezený, právě když se vejde do koule, tj. $(\exists r,x)(X \subset B(x,r))$.
(2) Takto definovaná koule nemusí být kulatá, dokonce nemusí být ani konvexní. V případě metriky indukované normou konvexní bude.
(3) V diskrétní metrice: $B(x,1) = \{x\}$, ale $S(x,1) = X = B(x, r > 1)$. V jazyce **??** lze říci, že uzávěr otevřené koule je podmnožina uzavřené koule, tj. $\overline{B(x,r)} \subset S(x,r)$. (Rovnost platí v lineárním prstoru.)
(4) Diskrétní prostor $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ je omezený, ale prostor s absolutní hodnotou $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ není omezený.

Věta 1.8. Nechť $x,y \in X$, $x \neq y$. Pak existuje $r > 0$ tak, že platí: $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$.

Důkaz. Například $r = \frac{1}{2}\varrho(x,y)$. □

Definice 1.9. Říkáme, že množina $A \subset X$ je **otevřená**, právě když s libovolným bodem obsahuje i nějakou kouli se středem v tomto bodu, tj. $(\forall x \in A)(\exists B(x, r) \subset A)$.

Poznámka. Příklady otevřených množin:

(1) Každý prostor je otevřená množina, prázdná množina je také otevřená.
(2) Otevřená koule je otevřená množina.

Věta 1.10. (i) Buďte $A_1, \ldots, A_n$ otevřené množiny v X. Potom $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ je otevřená množina.

(ii) Jsou-li A_α otevřené množiny ($\alpha \in \mathcal{I}$ **libovolná** indexová množina), je $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$ je otevřená množina.

Důkaz. (i) Pokud je průnik prázdný, je tvrzení triviální. Pro libovolný bod x neprázdného průniku pak platí: $(\forall i \in \hat{n})(\exists r_i > 0)(B(x, r_i) \subset A_i)$. Vzhledem k tomu, že množin je konečný počet, existuje $r = \min_{i \in \hat{n}} r_i$, tedy platí

$$B(x, r) \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

což je tvrzení věty.

(ii) Libovolný bod x ze sjednocení leží alespoň v jedné množině A_α, tudíž podle předpokladu existuje koule

$$B(x, r) \subset A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha.$$

□