1. Věty o záměně

Věta 1.1 (o limitě)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$ a nechť

(I) $z_0 \in A'$;
(II) Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ existuje $\lim_{z\to z_0, z\in A} f_n(z) = a_n$;
(III) Řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině A k $F(z)$.

Potom platí:

(i) Řada $\sum_0^\infty a_n$ konverguje;
(ii) Existuje $\lim_{z\to z_0, z\in A} F(z)$;
(iii) $\lim_{z\to z_0, z\in A} F(z) = \sum_0^\infty a_n$.

To jest:

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} \sum_{n=0}^\infty f_n(z) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f_n(z)$$

Důkaz. Položme $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$, $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Potom $\lim_{z\to z_0, z\in A} F_n(z) = s_n$, $F_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} F(z)$ a tvrzení věty je důsledkem **??**. □

Věta 1.2 (o spojitosti)**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí definovaných na množině A a spojitých v bodě $z_0 \in A$ (vzhledem k A). Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ stejnoměrně na množině A, je její součtová funkce spojitá v bodě z_0 vzhledem k množině A.

Důkaz. Plyne z věty 1.1 a důkazu věty **??** □

Věta 1.3 (Abel)**.** Konverguje-li mocninná řada s reálnými koeficienty, s kladným poloměrem konvergence R a se středem v bodě x_0 v bodě $x_0 + R$ resp. v bodě $x_0 - R$, je její součtová funkce spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva resp. v bodě $x_0 - R$ zprava.

Důkaz. Nechť např. mocninná řada konverguje v bodě $x_0 + R$. Potom podle věty **??** konverguje tato řada stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0 + R]$ a tudíž dle věty 1.2 musí být její součtová funkce spojitá na intervalu $[x_0, x_0+R]$ vzhledem k intervalu $[x_0, x_0+R]$. Speciálně musí být součtová funkce spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva. □

Věta 1.4 (o derivaci)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na omezeném a otevřeném intervalu $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ takových, že platí:

(I) Existuje $c \in \mathcal{J}$ tak, že řada $\sum_0^\infty f_n(c)$ konverguje;
(II) Řada $\sum_0^\infty f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\mathcal{J}$.

Potom platí:

(i) Řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\mathcal{J}$;
(ii) Součtová funkce F řady $\sum_0^\infty f_n$ je diferencovatelná na intervalu $\mathcal{J}$;
(iii) Derivace F' je součtovou funkcí řady $\sum_0^\infty f_n'$.

To jest:

$$\Big(\sum_{n=0}^\infty f_n(z)\Big)' = \sum_{n=0} f_n'(z)$$

Důkaz. Stačí užít větu **??** na posloupnost částečných součtů. □

Věta 1.5 (o integraci)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na intervalu $[a, b]$. Nechť dále řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a, b]$ a F buď její součtová funkce. Potom i funkce F je integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Plyne z věty **??**. □

Věta 1.6. Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na intervalu $[a,b]$. Nechť dále řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a,b]$ a označme F její součtovou funkci. Potom pro každou funkci g, která má absolutně konvergentní zobecněný integrál na intervalu $[a,b]$, platí:

$$\int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty \int\limits_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle věty 1.5 je funkce F riemannovsky integrabilní na intervalu $[a,b]$ a tudíž všechny zobecněné integrály $\int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konvergují. Zbývá tedy dokázat výše uvedenou rovnost. Ze stejnoměrné konvergence řady $\sum_0^\infty f_n(x)$ na intervalu $[a,b]$ plyne, že ke zvolenému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ a pro všechna $x \in [a,b]$ je

$$|F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x},$$

kde $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Potom pro $n > n_0$ platí:

$$\left|\sum_{k=0}^n \int\limits_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^b F_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |F_n(x) - F(x)|\ |g(x)|\,\mathrm{d}x < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon\,|g(x)|\,\mathrm{d}x}{1 + \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x} < \varepsilon$$

□