1. Úplné prostory

Definice 1.1. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Posloupnost $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ se nazývá **cauchyovská**, právě když splňuje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\varrho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon)$$

Poznámka.
(1) Každá cauchyovská posloupnost má nejvýše jednu hromadnou hodnotu a je omezená. Nemusí mít limitu ani hromadnou hodnotu — např. snadno nalezneme racionální posloupnost $\{r_n\}_1^\infty \in \mathbb{Q}$ a iracionální číslo $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $r_n \to s$.
(2) Pokud je posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$ cauchyovská a existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_1^\infty$ konvergující k x, tj. má hromadnou hodnotu, pak i $\{x_n\}_1^\infty$ konverguje k x. (Z cauhyovskosti musí být všechny členy od n_0 dál vzdáleny od sebe navzájem maximálně o epsilon, nemohou tedy být daleko od hromadné hodnoty).
(3) Pokud $\{x_n\}_1^\infty$ konverguje, je cauchyovská. (Stačí vzít $\varrho(x_n, L) < \frac{\varepsilon}{2}$, kde L je limita.)

Definice 1.2. Metrický prostor se nazývá **úplný**, právě když každá cauchyovská posloupnost konverguje.

Poznámka.
(1) Úplný prostor je uzavřený vzhledem k operaci $x_n \to$. Jinými slovy, prováděním limity nevypadneme z prostoru.
(2) $\mathbb{Q}$ není úplný, $\mathbb{R}$ je úplný. Tato poznámka nicméně platí pouze pro prostory s euklidovskou či jakoukoliv ekvivalentní metrikou. $\mathbb{Q}$ s diskrétní metrikou již úplným prostorem je, neboť v diskrétní metrice je posloupnost cauchyovská právě tehdy, je-li konstantní. Taková posloupnost pak bude mít jistě všechny prvky z prostoru a její limita v něm bude ležet také.
(3) Úplnost je tedy výhradně metrický pojem.
(4) Z Weierstrassovy věty bezprostředně vyplývá, že **každý kompaktní metrický prostor je úplný**.
(5) Prostor, jehož uzavřené koule jsou kompaktní, je úplný. (Všechny členy $x_n, n > n_0$ jsou díky cauchyovskosti v $B(x_{n_0}, \varepsilon) \subset S(x_{n_0}, \varepsilon)$ a kompaktnost $S(x_{n_0}, \varepsilon)$ zajistí konvergenci)

Definice 1.3. Podmnožinu A metrického prostoru (X, ϱ) nazveme úplnou, pokud je úplná jako metrický podprostor.

Věta 1.4. Je-li A uzavřená podmnožina úplného prostoru X, pak A je úplná.

Důkaz. A je uzavřená podmnožina úplného prostoru. Vezměme si cauchyovskou posloupnost bodů z A. Protože X je úplný, má v něm limitu. Body x_n jsou ale všechny v A, a tedy limita leží v uzávěru A. A je však uzavřená, a proto v ní každá cauchyovská posloupnost konverguje. □

Věta 1.5. Je-li A úplná podmnožina X, pak A je uzavřená.

Důkaz. (sporem) Chceme dokázat, že $X \setminus A$ je otevřená. Vezměme bod $x \in X \setminus A$ a předpokládejme, že neexistuje jeho okolí, které v něm leží, tj. průnik okolí s A je pro každé okolí neprázdný. Vytvoříme tedy posloupnost neprázdných koulí se středem x a poloměrem $1/n$. V každé je bod z A, máme tedy posloupnost bodů $\{x_n\}_1^\infty \subset A$, která má limitu x mimo A. To je spor s tím, že A je úplná. □

Definice 1.6. Zobrazení $f : (X, \varrho) \mapsto (X, \varrho)$ se nazývá **kontrahující**, právě když

$$(\exists k \in (0, 1))(\forall x, y \in X)(\varrho(f(x), f(y)) \leq k\varrho(x, y)).$$

Poznámka. Kontrahující zobrazení je stejnoměrně spojité.

Definice 1.7. Množinu $M \subset X$ nazýváme **hustou v** $N \subset X$, právě když $N \subset \overline{M}$. Dále množina M se nazývá **všude hustou** pokud $\overline{M} = X$. Prostor, který má všude hustou spočetnou podmnožinu nazýváme **separabilní**. Množinu B nazýváme **všude řídkou**, právě když $X \setminus \overline{B}$ je všude hustá.

Příklad. Je-li například $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Q}$ a $N = (0, 1)$, potom M je hustá v N, ale také M je všude hustá a spočetná a $\mathbb{R}$ je tedy separabilní.

Věta 1.8 (Banachova, o pevném bodě)**.** Každé kontrahující zobrazení f na úplném prostoru má právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno takové x, že platí $f(x) = x$. Navíc každá posloupnost $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ iterací zobrazení f konverguje k tomuto pevnému bodu.

Důkaz. Nechť $x_0 \in X$, $x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$. Pak z předpokladu kontrahujícího zobrazení dostáváme, že

$$\varrho(x_{m+1}, x_m) = \varrho(f(x_m), f(x_{m-1})) \leq k\varrho(x_m, x_{m-1}) \leq k^m \varrho(x_1, x_0) = k^m \varrho(f(x_0), x_0)$$

což můžeme použít v cauchyovské podmínce

$$\varrho(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{i=1}^{p} \varrho(x_{n+i-1}, x_{n+i}) \leq \sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1} \varrho(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} \varrho(x_1, x_0) < \varepsilon$$

Tedy posloupnost postupných aproximací je cauchyovská. Díky úplnému prostoru proto platí, že existuje $x \in X$ takové, že $x_n \to x$.

Důkaz existence pevného bodu: Platí, že $x_{n+1} = f(x_n)$. Přechodem k $n \to \infty$ a s využitím spojitosti f dostáváme $x = f(x)$.

Důkaz jednoznačnosti: $\varrho(f(x), f(x')) \leq k\varrho(x, x')$, tedy $\varrho(x, x') \leq k\varrho(x, x') < \varrho(x, x')$, což je spor. □

Poznámka. Uvedená metoda se používá při řešení úloh v numerické matematice. V praxi často nelze zajistit, aby zobrazení f bylo kontrahující, přesto ale posloupnost postupných aproximací konverguje. Může totiž platit, že až teprve zobrazení $f_i = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i\text{-krát}}$ kontrahuje.

Nechť dále x je pevný bod $f_i(x)$:

$$f_i(f(x)) = f_{i+1}(x) = f(f_i(x)) = f(x),$$

tedy $f(x)$ je pevným bodem f_i, z jednoznačnosti pevného bodu pak vyplývá, že $f(x) = x$, tedy x je pevným bodem f.

Sestrojme pak i posloupností:

1	2	3		i
x_0	$x_1 = f(x_0)$	$x_2 = f_2(x_0)$	$\cdots$	$x_{i-1} = f_{i-1}(x_0)$
$x_i = f_i(x_0)$	$x_{i+1} = f_{i+1}(x_0)$	$x_{i+2} = f_{i+2}(x_0)$	$\cdots$	$x_{2i-1} = f_{2i-1}(x_0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Všechny posloupnosti jsou posloupnostmi aproximací i-té iterace pro různé počáteční body. Všechny konvergují k x a podle věty o pokrytí celá posloupnost postupných aproximací pro zobrazení f konverguje k x.

Poznámka. Důkaz předchozí věty je na zkoušce *bezvýhradně* vyžadován (i na E).

Definice 1.9. Lineární prostory klasifikujeme následovně:

- Normovaný lineární prostor, který je úplný vzhledem k metrice indukované normou, se nazývá **Banachův**.
- Pre-Hilbertův prostor, který je úplný vzhledem k metrice indukované skalárním součinem, se nazývá **Hilbertův**.

Poznámka. Hilbertův prostor je Banachův.