1. Celočíselné programování

Řešíme úlohu

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ \mathbf{A}x &= b \\ x &\geq 0 \\ x &\in \mathbf{Z}^{n,1}. \end{aligned}$$

1.1. Gomoryho algoritmus.

Nejdřív vyřeším úlohu bez podmínky celočíselnosti. Pokud je řešení celočíselné, končím. Pokud ne, vyberu jakoukoli rovnici, ve které je na levé straně tabulky simplexové metody necelé číslo — tzv. **vytvořující rovnice**. Označme

$$B = \{j \in \widehat{n} | x_j \text{ je bazická v optimální tabulce neceločíselné úlohy}\}.$$

Vytvořující rovnice má tvar

$$x + \sum_{j \notin B} a_j x_j = a_0,$$

kde $a_0 \notin \mathbf{Z}$, neboli

$$x = a_0 - \sum_{j \notin B} a_j x_j.$$

Číslo

$$a_0 - \sum_{j \notin B} a_j x_j$$

tedy musí být celé pro každé přípustné řešení celočíselné úlohy. Označme $f_0 = a_0 - [a_0]$, tedy $f_0 \in \langle 0, 1)$, $f_j = a_j - [a_j]$ pro $j \notin B$, tedy $f_j \in \langle 0, 1)$. Předchozí výraz lze pak přepsat

$$f_0 + [a_0] - \sum_{j \notin B} (f_j + [a_j]) x_j \in \mathbf{Z},$$

to je ekvivalentní

$$f_0 - \sum_{j \notin B} f_j x_j \in \mathbf{Z}$$

pro každé přípustné řešení celočíselné úlohy. Suma může nabývat pouze hodnot $f_0, f_0 + 1, f_0 + 2, \ldots$. Do soustavy rovnic proto přidáme rovnici

$$\sum_{j \notin B} f_j x_j \geq f_0.$$

Všechna celočíselná řešení zůstala, ale množina neceločíselných řešení se zmenšila, například původní optimální řešení tam už nepatří. Nerovnici převedeme na rovnici

$$\sum_{j \notin B} f_j x_j - s = f_0, \quad s \geq 0, s \in \mathbf{Z}$$

a rovnici vynásobíme -1

$$s - \sum_{j \notin B} f_j x_j = -f_0, \quad s \geq 0, s \in \mathbf{Z}.$$

K tabulce tak přibude řádek. Nová tabulka není primárně přípustná, ale je duálně přípustná, takže se použije duální simplexová metoda.

Je možné dokázat, že po konečném počtu kroků nalezneme přípustné řešení.

1.2. **Smíšené programování.** Řešíme úlohu

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ \mathbf{A}x &= b \\ x &\geq 0 \\ x_j &\in \mathbf{Z}, \quad j \in \mathcal{J} \subset \widehat{n},\ \mathcal{J} \neq \widehat{n}. \end{aligned}$$

Nejdřív opět vyřešíme neceločíselnou úlohu. Nechť optimální tabulka nesplňuje podmínku celočíselnosti. Buď opět B množina indexů bazických proměnných. Nechť vytvořující rovnice má tvar

$$x + \sum_{j \notin B} a_j x_j = a_0, \quad a_0 \notin \mathbf{Z},$$

$$x = a_0 - \sum_{j \notin B} a_j x_j.$$

Pak musí pro každé přípustné řešení smíšené úlohy platit

$$a_0 - \sum_{j \notin B} a_j x_j \in \mathbf{Z}.$$

Buď $f_0 = a_0 - [a_0] \in (0,1)$, potom předchozí podmínka je ekvivalentní s

$$f_0 - \sum_{j \notin B} a_j x_j \in \mathbf{Z}.$$

Buďte dále $\mathcal{J}^+ = \{j \notin B | a_j \geq 0\}$, $\mathcal{J}^- = \{j \notin B | a_j < 0\}$, je $\widehat{n} \setminus B = \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$

Pokud je

$$\sum_{j \notin B} a_j x_j \geq 0,$$

musí suma nabývat hodnot $f_0, f_0 + 1, f_0 + 2, \ldots$, tedy

$$\sum_{j \notin B} a_j x_j \geq f_0.$$

Pokud je

$$\sum_{j \notin B} a_j x_j < 0,$$

musí nabývat hodnot $f_0 - 1, f_0 - 2, \ldots$, tedy

$$\sum_{j \notin B} a_j x_j \leq f_0 - 1.$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}^+} a_j x_j \geq \sum_{j \in \mathcal{J}^+} a_j x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}^-} a_j x_j = \sum_{j \notin B} a_j x_j \geq f_0$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}^-} a_j x_j \leq \sum_{j \notin B} a_j x_j \leq f_0 - 1 \iff \sum_{j \in \mathcal{J}^-} \frac{f_0}{f_0 - 1} a_j x_j \geq f_0.$$

Protože ve druhé podmínce je $(f_0/(f_0-1))a_j > 0$ ($a_j < 0$ a $f_0 \in \langle 0,1))$, k soustavě přidáme novou podmínku (spadla z nebe, nicméně snadno ověříme, že je ve shodě s výše uvedenými nerovnostmi)

$$\sum_{j \in \mathcal{J}^+} a_j x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}^-} \frac{f_0}{f_0 - 1} a_j x_j \geq f_0,$$

ovšem převedenou na rovnici

$$-\sum_{j \in \mathcal{J}^+} a_j x_j - \sum_{j \in \mathcal{J}^-} \frac{f_0}{f_0 - 1} a_j x_j + s = -f_0,$$

kde $s \geq 0$. Dále, stejně jako v předchozím případě, pokračujeme duální simplexovou metodou.

Pokud vezmeme v úvahu i celočíselnost jiných proměnných, lze vyrobit lepší podmínku:

(1) Je-li $x_j \in \mathbf{Z}$ a $a_j \in \mathbf{Z}$, lze sčítanec vynechat.

(2) Je-li $x_j \in \mathbf{Z}$ a $a_j \notin \mathbf{Z}$, potom
  (a) pro $j \in \mathcal{J}^+$ lze a_j nahradit $f_j = a_j - [a_j]$,
  (b) pro $j \in \mathcal{J}^-$ lze za celý koeficient dosadit f_j nebo jen za a_j dosadit $f_j - 1$. Porovnáme

$$\min\left\{f_j, \frac{f_0}{f_0-1}(f_j-1)\right\}.$$

Zřejmě $\min = f_j$, právě když $f_j \le f_0$.

Koeficienty f^* v podmínce

$$\sum_{j \notin B} f_j^* x_j \ge f_0$$

tedy volíme následovně:

$$f_j^* = \begin{cases} a_j & \dots x_j \notin \mathbf{Z},\ a_j \ge 0 \\ \frac{f_0}{f_0-1} a_j & \dots x_j \notin \mathbf{Z},\ a_j < 0 \\ 0 & \dots x_j \in \mathbf{Z},\ a_j \in \mathbf{Z} \\ f_j & \dots x_j \in \mathbf{Z},\ f_j \le f_0 \\ \frac{f_0}{f_0-1}(f_j-1) & \dots x_j \in \mathbf{Z},\ f_j > f_0 \end{cases}$$

1.3. **Plně celočíselný algoritmus lineárního programování.** Algoritmus řeší úlohu LP v kanonickém tvaru, která zůstává celočíselná, vychází se z **duálně přípustné tabulky**. Z toho budeme vycházet při tvorbě přídavné podmínky. Tu je nutné vytvořit tak, aby byl pivot roven -1 a vyhnuli jsme se tak dělení. Při odvozování se bude hodit

Věta 1.1. Nechť $y \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$. Potom existuje $r \in \langle 0, \lambda)$ takové, že

$$y = \left[\frac{y}{\lambda}\right]\lambda + r.$$

Označíme opět

$$B = \{j \in \widehat{n} | x_j \text{ je bazická}\}.$$

$$a_0 = x + \sum_{j \notin B} a_j x_j$$

$$a_0 = \left[\frac{a_0}{\lambda}\right]\lambda + r_0 = x + \sum_{j \notin B}\left(\left[\frac{a_j}{\lambda}\right]\lambda + r_j\right)x_j$$

$$x + \sum_{j \notin B} r_j x_j = r_0 + \lambda \underbrace{\left(\left[\frac{a_0}{\lambda}\right] - \sum_{j \notin B}\left[\frac{a_j}{\lambda}\right]x_j\right)}_{s}$$

Pro přípustné řešení je $s \in \mathbf{Z}$ a $s \ge 0$, neboť levá strana je nezáporná a $r_0 < \lambda$. Kdyby $s \le -1$, byla by pravá strana záporná.

$$s = \left[\frac{a_0}{\lambda}\right] - \sum_{j \notin B}\left[\frac{a_j}{\lambda}\right]x_j$$

Alespoň jedno $a_j < 0$, jinak by úloha neměla přípustné řešení, neboť $a_0 < 0$.

Číslo λ musíme zvolit dostatečně vysoké, aby byla v sumě alespoň jedna -1. Současně je ale vhodné zvolit λ co nejmenší možné, aby algoritmus rychle konvergoval. Neexistuje univerzální recept, jak λ volit. Obvykle vyhovuje následující postup.

Nechť vedoucí řádek má tvar

$$a_{v0} = x + \sum_{j \notin B} a_{vj} x_j$$

a nechť s je lexikograficky nejmenší sloupec ze sloupců, pro které je $a_{vj} < 0$. Pro j taková, že $a_{vj} < 0$ definujeme

$$\mu_j = \left[\frac{a_{0j}}{a_{0s}}\right] \in \mathbf{N},$$

$\mu_j \in \mathbf{N}$ díky tomu, že sloupec s je lexikograficky nejmenší. Pokud je $a_{0s} = 0$, zvolíme rovnou $\lambda = -a_{vs}$. Buď

$$\lambda_j = -\frac{a_{vj}}{\mu_j}$$

a

$$\lambda = \max\{\lambda_j | a_{vj} < 0\} \geq 1,$$

neboť $a_{vj} < 0$ a tedy $a_{vj} \leq -1$, protože $a_{vj} \in \mathbf{Z}$. Protože je $\mu_s = 1$, je $\lambda_s = -a_{vs} \geq 1$. Pokud $\lambda = 1$, je $\lambda_s = 1$ a není nutné přidávat další podmínku, protože už tam -1 mám.

(1) Ověříme, že pivot je -1.

$$-1 \geq \left[\frac{a_{vs}}{\lambda}\right] \geq \left[\frac{a_{vs}}{\lambda_s}\right] = [-\mu_s] = -1 \implies \left[\frac{a_{vs}}{\lambda}\right] = -1.$$

(2) Ověříme soulad s prověrkou poměrů. Hledá se minimum z poměrů v absolutní hodnotě, takže musí platit

$$\frac{a_{0s}}{\left[\frac{a_{vs}}{\lambda}\right]} \geq \frac{a_{0j}}{\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right]} \iff a_{0s} \leq \frac{a_{0j}}{-\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right]} \iff -\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right] \leq \frac{a_{0j}}{a_{0s}}.$$

Protože je

$$-\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right] \leq -\left[\frac{a_{vj}}{\lambda_j}\right] = -[-\mu_j] = \mu_j = \left[\frac{a_{0j}}{a_{0s}}\right] \leq \frac{a_{0j}}{a_{0s}},$$

nerovnost platí.