1. Princip dekompozice

Řešme opět úlohu

$$\begin{aligned}\min z &= cx\\ \mathbf{A}x &= b\\ x &\geq 0\end{aligned}$$

a předpokládejme, že matice $\mathbf{A}$ má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \cdots & \mathbf{L}_p \\ \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \mathbf{A}_p \end{pmatrix}.$$

To v praxi nastane například když matice $\mathbf{L}_j$ popisují procesy v rámci celého závodu a matice $\mathbf{A}_j$ jeho části. Dále nechť $\mathbf{L}_j \in \mathbf{R}^{m_0,n_j}$, $\mathbf{A}_j \in \mathbf{R}^{m_j,n_j}$, $c = (c_1, \ldots, c_p)$, $c_j \in \mathbf{R}^{n_j}$,

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}, \quad b_j \in \mathbf{R}^{m_j,1}, \qquad\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbf{R}^{n_j,1}.$$

Úlohu přepíšeme pomocí nového značení.

$$\begin{aligned}\min z &= \sum_{j=1}^{p} c_j x_j\\ \sum_{j=1}^{p} \mathbf{L}_j x_j &= b_0\\ \mathbf{A}_j x_j &= b_j, \quad j \in \widehat{p}\\ x_j &\geq 0, \quad j \in \widehat{p}.\end{aligned}$$

Označme $\mathcal{S}_j \equiv \mathbf{A}_j x_j = b_j,\ x_j \geq 0$ pro $j \in \widehat{p}$. Předpokládejme, že $\mathcal{S}_j$ jsou neprázdné a omezené. Protože $\mathcal{S}_j$ je konvexní, platí, že $\mathcal{S}_j = [x_{1j}, \ldots, x_{s_j j}]_\kappa$, kde $x_{1j}, \ldots, x_{s_j j}$ jsou jeho vrcholy. Potom složky řešení x lze vyjádřit jako konvexní kombinace

$$x_j = \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} x_{ij}, \quad j \in \widehat{p} \qquad\qquad \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} \geq 0.$$

Účelovou funkci z lze dále zapsat jako

$$z = \sum_{j=1}^{p} c_j \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{s_j} \underbrace{c_j x_{ij}}_{\text{ozn. } c_{ij}} \lambda_{ij}$$

a první část soustavy rovnic jako

$$\sum_{j=1}^{p} \mathbf{L}_j x_j = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{L}_j \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{s_j} \underbrace{\mathbf{L}_j x_{ij}}_{l_{ij}} \lambda_{ij} = b_0.$$

Tím jsme problém převedli na hledání

$$\min z = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{s_j} c_{ij} \lambda_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{s_j} l_{ij} \lambda_{ij} = b_0$$

$$\sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} = 1, \quad j \in \widehat{p}$$

$$\lambda_{ij} \geq 0.$$

Původní počet rovnic byl $m_0 + \sum_{j=1}^{p} m_j$, teď máme pouze $m_0 + p$ rovnic. Počet proměnných byl $\sum_{j=1}^{p} n_j$, teď jich je $\sum_{j=1}^{p} s_j$. To je obvykle víc, což ale není tak podstatné, protože náročnost určuje převážně počet rovnic.

Problém je ale s nalezením vrcholů, abychom měli koeficienty c_{ij} a l_{ij}. Naštěstí jich stačí pro začátek najít pouze $m_0 + p$. Z počáteční tabulky tak budeme mít k dispozici pouze $m_0 + p$ sloupců, které budou tvořit matici $\mathbf{B}$. Pak použijeme redukovanou simplexovou metodu. Matice celé soustavy bude mít na počátku tvar

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{s_1 1} & \dots & \dots & \dots & c_{1p} & c_{2p} & \dots & c_{s_p p} \\ l_{11} & l_{21} & \dots & l_{s_1 1} & \dots & \dots & \dots & l_{1p} & l_{2p} & \dots & l_{s_p p} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Označme $(\pi, \overline{\pi})$ vektor π (viz Modifikovaná simplexová metoda), $\overline{\pi} = (\overline{\pi}_1, \dots, \overline{\pi}_p)$. Potom další vektor c se vypočte pomocí vztahu

$$\overline{c_{ij}} = c_{ij} - (\pi, \overline{\pi}) \begin{pmatrix} l_{ij} \\ e_j^T \end{pmatrix} = c_{ij} - \pi l_{ij} - \overline{\pi}_j,$$

kde e_j je j-tý vektor ze standardní báze. Problém je ale v tom, jak najít vedoucí sloupec, když jiná c_{ij} než ta bazická neznám. Pomocí simplexové metody proto najdeme-

$$\min_i (c_{ij} - \pi l_{ij} - \overline{\pi}_j)$$

při pevně zvoleném j, což je ekvivalentní hledání minima

$$\min_i (c_{ij} - \pi l_{ij}) = \min_i (c_j x_{ij} - \pi L_j x_{ij}) = \min_i (c_j - \pi L_j) x_{ij} = \min_{x_j \in \mathcal{S}_j} (c_j - \pi L_j) x_j.$$

To najdeme simplexovou metodou, nakonec odečteme ještě $\overline{\pi}_j$. To provádíme postupně pro $j \in 1, \dots, p$, dokud není minimum záporné. Pokud se záporné minimum nenajde, je tabulka optimální.