1. Projekční míra

Projekční míra je zobrazení $(-\infty, \lambda) \mapsto P_\lambda$. Buď $\mu < \lambda$, položme $\Delta = [\mu, \lambda) = (-\infty, \lambda) \setminus (-\infty, \mu) \mapsto P_\lambda - P_\mu$. $P(\Delta) = P_\lambda - P_\mu = P_\lambda(I - P_\mu)$ je OG projektor. Protože $P_\mu \leq P_\lambda$, je $\operatorname{Ran} P_\mu \subset \operatorname{Ran} P_\lambda$ a $\operatorname{Ran} P_\lambda = \operatorname{Ran} P_\mu \oplus \operatorname{Ran}(P_\lambda - P_\mu)$.

Uvažujme rozdělení $\nu = \{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n\}$, $\nu_0 \leq m$, $\nu_n > M$, $\nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_n$, $\Delta_i = [\nu_{i-1}, \nu_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$. Zvolíme libovolně $\tilde{\nu}_i \in \Delta_i$, označíme

$$A_\nu = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\nu}_i P(\Delta_i) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad A_\nu^* = A_\nu.$$

Dále platí $P(\Delta_i)P(\Delta_j) = \delta_{ij} P(\Delta_i)$, neboť pro $i < j$ je $\nu_{i-1} < \nu_i \leq \nu_{j-1} < \nu_j$ a $(P_{\nu_i} - P_{\nu_{i-1}})(P_{\nu_j} - P_{\nu_{j-1}}) = P_{\nu_i} - P_{\nu_i} - P_{\nu_{i-1}} + P_{\nu_{i-1}} = 0$. Analogicky pro $i > j$.

Zřejmě platí

$$\sum_{i=1}^{n} P(\delta_i) = I.$$

Poznámka. Mějme $\{P_j\}_{j=1}^n$ množinu OG projektorů, $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, $\sum_{j=1}^n P_j = I$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$. Potom

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \right\| = \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}.$$

Důkaz. Označme $X = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$. Pak

$$\|Xu\|^2 = (Xu, Xu) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j (P_i u, P_j u) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 (u, P_i u) \leq$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| \right)^2 \sum_{i=1}^{n} (u, P_i u) = \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| \right)^2 \|u\|^2,$$

neboť $(P_i u, P_j u) = (u, P_i P_j u) = \delta_{ij}(u, P_i u)$. Označme $\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| = |\lambda_{j_0}|$ a zvolme $u \in \operatorname{Ran} P_{j_0}$. Pak $Xu = \lambda_{j_0} u$ a proto $\|X\| = |\lambda_{j_0}|$. □

Označme $d_\nu = \max_{1 \leq j \leq n}(\nu_j - \nu_{j-1})$. Buďte $\nu = \{\nu_j\}_{j=0}^n$, $\sigma = \{\sigma_j\}_{j=0}^m$, $\{\mu_k\}_{j=0}^p = \{\nu_j\}_{j=0}^n \cup \{\sigma_j\}_{j=0}^m$, μ uspořádáme tak, že $\mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_p$. Platí $\mu_0 = \min\{\nu_0, \sigma_0\}$, $\mu_p = \max\{\nu_n, \sigma_m\}$ a tedy $\mu_0 \leq m$, $\mu_p > M$.

Uvažujme $\mu_k = \nu_{j-1} < \nu_j = \mu_l$. Zřejmě $l \geq k + 1$ a

$$P([\nu_{j-1}, \nu_j)) = P([\mu_k, \mu_l)) = \sum_{i=1}^{l-k} P([\mu_{k+i-1}, \mu_{k+i})).$$

Pro každé $i = 1, \ldots, p$ existuje j takové, že $[\mu_{i-1}, \mu_i) \subset [\nu_{j-1}, \nu_j)$. Položíme $\tilde{\mu}_i := \tilde{\nu}_j$. Dále platí

$$\tilde{\nu}_j P([\nu_{j-1}, \nu_j)) = \sum_{i=1}^{l-k} \tilde{\mu}_{k+i} P([\mu_{k+i-1}, \mu_{k+i})).$$

Vysčítáním přes všechny částečné intervaly ν dostaneme

$$A_\nu = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\nu}_j P([\nu_{j-1}, \nu_j)) = \sum_{i=1}^{p} \tilde{\mu}_i P([\mu_{i-1}, \mu_i)).$$

To samé provedeme pro σ. Označme $\tilde{\tilde{\mu}}_i := \tilde{\sigma}_j$, kde $[\mu_{i-1}, \mu_i) \subset [\sigma_{j-1}, \sigma_j)$

$$A_\sigma = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_j P([\sigma_{j-1}, \sigma_j)) = \sum_{i=1}^{p} \tilde{\tilde{\mu}}_i P([\mu_{i-1}, \mu_i)).$$

Z toho plyne

$$\|A_\nu - A_\sigma\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} (\tilde{\mu}_i - \tilde{\tilde{\mu}}_i) P([\mu_{i-1}, \mu_i)) \right\| \leq \max_{1\leq i\leq p} \left|\tilde{\mu}_i - \tilde{\tilde{\mu}}_i\right|.$$

Protože $[\mu_{i-1}, \mu_i) \subset [\nu_{j-1}, \nu_j)$, $[\mu_{i-1}, \mu_i) \subset [\sigma_{k-1}, \sigma_k)$, je $[\nu_{j-1}, \nu_j) \cap [\sigma_{k-1}, \sigma_k) \neq \emptyset$ a proto označme $[\nu_{j-1}, \nu_j) \cup [\sigma_{k-1}, \sigma_k) = [a, b)$. Potom $\left|\tilde{\mu}_i - \tilde{\tilde{\mu}}\right| \leq b - a \leq d_\nu + d_\sigma$. Dostáváme tak odhad

$$\|A_\nu - A_\sigma\| \leq d_\nu + d_\sigma.$$

Důsledek. *Je-li $\nu^{(k)} = \{\nu_j^{(k)}\}_{j=0}^{n_k}$ taková posloupnost rozdělení, že $\lim_{k\to\infty} d_{\nu(k)} = 0$, potom $A_{\nu^{(k)}}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a tedy existuje $A = \lim_{k\to\infty} A_{\nu^{(k)}}$ v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A^* = A$. Navíc A nezávisí na volbě $\nu^{(k)}$.*

Důkaz. Zvolme druhou posloupnost $\sigma^{(k)}$, že $\lim_{k\to\infty} d_{\sigma^{(k)}} = 0$, potom $\lim A_{\nu^{(k)}} = \lim A_{\sigma^{(k)}}$. Zavedeme $\mu^{(k)}$: $\nu^{(1)}, \sigma^{(1)}, \nu^{(2)}, \sigma^{(2)}, \ldots$, Opět $\lim d_\mu^{(k)} = 0$ a tedy $\lim A_{\mu^{(k)}}$ existuje a je stejná jako limity vybraných posloupností $A_{\sigma^{(k)}}$ a $A_{\nu^{(k)}}$. □

Věta 1. *Ke každému $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A^* = A$, existuje právě jeden rozklad identity $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ takový, že $A = \int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda$. Navíc pro každé $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ platí $CA = AC \iff \forall\lambda\ CP_\lambda = P_\lambda C$.*

Důkaz. Z předchozích lemmat víme, že pro $A = A^*$ existuje právě jeden projektor $E_+(A)$: $AE_+(A) \geq 0$, $A(I - E_+(A)) \leq 0$, $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ran} E_+(A)$.

Pro každé λ položme $P_\lambda = I - E_+(A-\lambda)$, kde $E_+[A-\lambda]$ je projektor E_+ odpovídající operátoru $A - \lambda$. Ukážeme, že P_λ je rozklad jedničky:

(1) Položme $\lambda \leq m_A = \inf_{\|x\|=1}(x, Ax)$. Pro každé $x \neq 0$ je $\lambda(x,x) < m_A(x,x) \leq (x, Ax)$ a tedy $0 \leq (x, (A-\lambda)x)$. Proto $A-\lambda = |A-\lambda|$, $\operatorname{Ker}(A-\lambda-|A-\lambda|) = \mathcal{H}$, $\operatorname{Ran} E_+[A-\lambda] = \mathcal{H}$ a $E_+[A-\lambda] = I \implies P_\lambda = 0$.

(2) Buď $\lambda > M_A$. Potom pro $x \neq 0$ je $\lambda(x,x) > M_A(x,x) \geq (x, Ax)$ a $0 \geq (x, (A-\lambda)x)$. Předpokládejme, že $0 \neq x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda)$. Potom by $(x, \lambda x) = (x, Ax) \leq M_A(x,x)$ a $\lambda(x,x) > M_A(x,x) \geq (x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda(x,x)$, což je spor. Tedy $\operatorname{Ker}(A-\lambda) = \{0\}$. Nulový operátor splňuje všechny požadavky kladené na E_+ a z jednoznačnosti $E_+[A-\lambda] = 0$.

(3) Buď $\lambda < \mu$. Ukážeme, že $P_\lambda P_\mu = P_\lambda \iff 0 = P_\lambda(I - P_\mu)$. Z vlastností projektoru E_+ a nezápornosti (libovolného) projektoru plyne

$$\underbrace{P_\lambda}_{\geq 0}\underbrace{(I-P_\mu)(A-\mu)}_{\geq 0} \geq 0, \quad \underbrace{(A-\lambda)P_\lambda}_{\leq 0}\underbrace{(I-P_\mu)}_{\geq 0} \leq 0.$$

Spojením obou nerovností dostaneme

$$\mu P_\lambda(I-P_\mu) \leq AP_\lambda(I-P_\mu) \leq \lambda P_\lambda(I-P_\mu).$$

Pro každé x tak platí

$$\mu(x, P_\lambda(I-P_\mu)x) \leq \lambda(x, P_\lambda(I-P_\mu)x)$$

a protože $\lambda < \mu$, je

$$0 \leq \underbrace{(\lambda-\mu)}_{<0}\underbrace{(x, P_\lambda(I-P_\mu)x)}_{\geq 0}.$$

Z toho plyne, že pro každé x je

$$0 = (x, P_\lambda(I-P_\mu)x) = (x, P_\lambda^2(I-P_\mu)^2 x) = \|P_\lambda(I-P_\mu)x\|^2$$

a tedy $P_\lambda(I-P_\mu) = 0$.

(4) Buď $\lambda < \mu$, $P([\lambda,\mu)) = P_\mu - P_\lambda = P_\mu(I-P_\lambda)$. Z monotonie podle lemmatu **??** plyne existence $\text{s-lim}_{\lambda\to\mu-} P_\lambda = P_{\mu-0}$, označme $P_0 = P_\mu - P_{\mu-0} = \text{s-lim}_{\lambda\to\mu-} P([\lambda,\mu))$.

Obdobně jako výše se ukáže nerovnost $\lambda P(\Delta) \leq AP(\Delta) \leq \mu P(\Delta)$. Limitním přechodem dostáváme $\mu P_0 \leq AP_0 \leq \mu P_0 \implies (A-\mu)P_0 = 0 \iff \operatorname{Ran} P_0 \subset \operatorname{Ker}(A-\mu) \subset \operatorname{Ran} E_+[A-\mu] = \operatorname{Ran}(I-P_\mu)$. Z toho dále plyne $P_0 \leq I - P_\mu \iff P_0(I-P_\mu) = P_0 \iff P_0P_\mu = 0$. Současně $P([\lambda,\mu))P_\mu = (P_\mu - P_\lambda)P_\mu = P_\mu - P_\lambda = P([\lambda,\mu))$. Po provedení limity $P_0P_\mu = P_0$. Celkem $P_0 = 0$, takže P_λ je spojitá zleva.

(5) Zbývá dokázat rovnost

$$A = \int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda = \lim A_\nu = \lim \sum \tilde{\nu}_i P(\Delta_i^\nu).$$

Opět jako předtím ukážeme $\nu_{i-1}P(\Delta_i^\nu) \le AP(\Delta_i^\nu) \le \nu_i P(\Delta_i^\nu)$. Platí

$$A - A_\nu = \sum_i AP(\Delta_i^\nu) - \sum_i \tilde{\nu}_i P(\Delta_i^\nu) \le \sum_i (\nu_i - \tilde{\nu}_i)P(\Delta_i^\nu) \le \sum_i d_\nu P(\Delta_i^\nu) = d_\nu I.$$

Podobně se to odhadne zdola: $A - A_\nu \ge -d_\nu I$. Celkem pro každé x platí

$$-d_\nu(x,x) \le (x,(A-A_\nu)x) \le d_\nu(x,x)$$

a pro $x \neq 0$

$$\frac{|(x,(A-A_\nu)x)|}{(x,x)} \le d_\nu.$$

Protože $A - A_\nu$ je samosdružený, je

$$\|A - A_\nu\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|(x,(A-A_\nu)x)|}{(x,x)} \le d_\nu.$$

Je-li $\lim d_{\nu^{(k)}} = 0$, potom $\lim A_{\nu^{(k)}} = A$ v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a proto $A = \int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda$.

(6) Komutativnost: Je-li $CP_\lambda = P_\lambda C$, pak i $CP(\Delta_i^\nu) = P(\Delta_i^\nu)C$ a $CA_\nu = A_\nu C$, po provedení limity $CA = AC$.

Je-li $CA = AC$, pak $C(A-\lambda) = (A-\lambda)C$, z lemmatu pak plyne $CE_+[A-\lambda] = E_+[A-\lambda]C$, $CP_\lambda = P_\lambda C$.

(7) Jednoznačnost P_λ dokážeme později. □

Lemma 2. *Buď $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normální. Potom $\|A\| = r_\sigma(A)$.*

Důkaz. Platí

$$\|Ax\|^2 = (Ax,Ax) = (x,A^*Ax) \le \|x\|\,\|A^*Ax\| =$$
$$= \|x\|\sqrt{(A^*Ax,A^*Ax)} = \|x\|\sqrt{(A^2x,A^2x)} = \|x\|\left\|A^2x\right\|,$$

dále postupujeme jako v důkazu věty **??**. □

Buď $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, p polynom. Umíme spočítat $p(A)$. Buď $f \in \mathcal{C}([m_A, M_A])$. Protože $A = A^*$, je $p(A)$ normální a platí

$$\|p(A)\| = r_\sigma(p(A)) = \sup\{|\lambda| \,|\lambda \in \sigma(p(A))\} = \sup\{|\lambda| \,|\lambda \in p(\sigma(A))\} =$$
$$= \sup\{|p(\sigma)| \,|\xi \in \sigma(A)\} \le \sup\{|p(\xi)| \,|\xi \in [m_A, M_A]\} = \|p\|_\infty.$$

Z Weierstrasse plyne, že pro $f \in \mathcal{C}([m_A, M_A])$ existuje posloupnost polynomů p_n taková, že $\lim \|f - p_n\| = 0$. Posloupnost p_n je cauchyovská v $\mathcal{C}([m_A, M_A])$ a z nerovnosti $\|p_n(A) - p_m(A)\| \le \|p_n - p_m\|_\infty$ plyne, že i $p_n(A)$ je cauchyovská v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tudíž existuje $\lim p_n(A)$ v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Tato limita nezávisí na volbě p_n. Pokud $q_n \to f$ v $\mathcal{C}([m_A, M_A])$, položíme r_n: $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ a $r_n \to f$ v $\mathcal{C}([m_A, M_A])$ a podle věty o vybraných posloupnostech $\lim p_n(A) = \lim q_n(A) = \lim r_n(A)$.

Pokládáme $f(A) = \lim p_n(A) \in \mathcal{B}(H)$. Protože $p_n(A)p_n(A)^* = p_n(A)^*p_n(A)$, je i $f(A)f(A)^* = f(A)^*f(A)$ a tedy $f(A)$ je normální. Je-li f reálná, lze i p_n volit reálné a $p_n(A)^* = p_n(A)$ a tudíž i $f(A)^* = f(A)$. Je-li f komplexní, je $\overline{p_n}(A) = p_n(A)^*$ a $\overline{f}(A) = f(A)^*$. Pro normu $f(A)$ platí odhad

$$\|f(A)\| = \lim_{n\to\infty} \|p_n(A)\| \le \lim_{n\to\infty} \|p_n\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Definice 3. Nechť $\{P_\lambda\}$ je rozklad jedničky, $P_\lambda \equiv 0$ pro $\lambda \le m$, $P_\lambda \equiv I$ pro $\lambda > M$. Je-li $f \in \mathcal{C}([m,M])$, pak

$$\int f(\lambda)\,\mathrm{d}P_\lambda = \lim_{d(\nu)\to 0} \sum f(\tilde{\nu}_i)P(\delta_i^\nu) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Korektnost definice, tj. existence a jednoznačnost limity se ověří podobně jako u $\int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda$.

Věta 4. *Je-li $A = \int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda$, potom $f(A) = \int f(\lambda)\,\mathrm{d}P_\lambda$.*

Důkaz. Položme nejprve $f(\lambda) = \lambda^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Potom

$$\int \lambda^n \,\mathrm{d}P_\lambda = \lim_{d(\nu)\to 0} \sum_i \tilde{\nu}_i^n P(\Delta_i^\nu) = \lim_{d(\nu)\to 0} \left(\sum_i \tilde{\nu}_i P(\Delta_i^\nu) \right)^n = \left(\int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda \right)^n = A^n,$$

neboť při umocňování smíšené členy vypadnou díky tomu, že $P(\Delta_i^\nu)P(\Delta_j^\nu) = \delta_{ij} P(\Delta_i^\nu)$. Díky aditivitě pak tvrzení platí pro libovolný polynom.

Normu integrálu lze odhadnout jako

$$\left\| \int f(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda \right\| = \lim_{d(\nu)\to 0} \left\| \sum_i f(\tilde{\nu}_i) P(\Delta_i^\nu) \right\| \le \lim_{d(\nu)\to 0} \max_i |f(\tilde{\nu}_i)| \le \|f\|_\infty .$$

Důsledkem odhadu je následující tvrzení: Jestliže $f_n \to f$ v $\mathcal{C}([m,M])$, potom $\lim \int f_n(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda = \int f(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda$.

Zvolíme posloupnost polynomů $p_n \to f$ v $\mathcal{C}([m_A, M_A])$, potom

$$f(A) = \lim p_n(A) = \lim \int p_n(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda = \int f(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda. \quad \square$$

Poznámka. Buďte $f, g \in \mathcal{C}([m,M])$ reálné, $f(t) < g(t)$ pro každé $t \in [m,M]$. Potom

$$\int f(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda \le \int g(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda.$$

Důkaz. Pro každé ν platí

$$\sum_i f(\tilde{\nu}_i) P(\Delta_i^\nu) \le \sum_i g(\tilde{\nu}_i) P(\Delta_i^\nu). \quad \square$$

Důkaz jednoznačnosti rozkladu jedničky (věta 1). Buď $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nechť $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ je rozklad jedničky takový, že $A = \int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda$. Zvolíme posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $0 \le f_n \le 1$ (λ_0 je libovolné pevné):

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \le \lambda_0 - \frac{1}{n} \\ 0 & \lambda \ge \lambda_0 \\ \text{lineární} & \lambda \in [\lambda - \frac{1}{n}, \lambda_0]. \end{cases}$$

Ukážeme, že $P_{\lambda_0 - \frac{1}{n}} \le f_n(A) = \int f_n(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda \le P_{\lambda_0}$: Zvolíme posloupnost rozdělení $\nu^{(k)}$, λ_0 a $\lambda_0 - \frac{1}{n}$ je dělicí bod pro každé k, $d(\nu^{(k)}) \to 0$. Potom ($\lambda_0 = \nu_{i(k)}$)

$$\sum_i f(\tilde{\nu}_i) P(\Delta_i^\nu) = \sum_{i \le i(k)} f(\tilde{\nu}_i) P(\Delta_i^\nu) \le \sum_{i \le i(k)} P(\Delta_i^\nu) = P((-\infty, \nu_{i(k)})) = P_{\lambda_0},$$

neboť pro $i > i(k)$ je $\tilde{\nu}_i \in \Delta_i^\nu \subset [\lambda_0, +\infty)$ a $f(\tilde{\nu}_i) = 0$. Obdobně se odhadne $\ge P_{\lambda_0 - \frac{1}{n}}$. Provedením limity z monotonie dostaneme rovnost

$$P_{\lambda_0} = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} f_n(A).$$

Pravá strana nezávisí na rozkladu jedničky, takže rozklad P_λ je jednoznačný. $\square$

Poznámka.

(1) Buďte $f, g \in \mathcal{C}([m,M])$. Potom $f(A)g(A) = (fg)(A)$.

Důkaz. Zvolme $p_n \to f$, $q_n \to g$ posloupnosti polynomů, potom $p_n q_n \to fg$. Dále je

$$(fg)(A) = \lim (p_n q_n)(A) = \lim p_n(A) q_n(A) = f(A)g(A). \quad \square$$

(2) Nechť P_λ je konstantní na $[a,b]$, $f \in \mathcal{C}$, $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$. Potom $\int f(\lambda) \,\mathrm{d}P_\lambda = 0$.

Důkaz. Můžeme požadovat, aby a, b byly dělicí body. Potom buď $\Delta_i^\nu \subset [a,b)$ a $P(\Delta_i^\nu) = P_{\nu_i} - P_{\nu_{i-1}} = 0$ nebo $\Delta_i^\nu \subset [a,b) = \emptyset$ a $f(\tilde{\nu}_i) = 0$. Proto

$$\sum_i f(\tilde{\nu}_i) P(\Delta_i^\nu) = 0$$

pro každé takové ν. $\square$

(3) Buď $A = \int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda$. Pak

$$(x, Ax) = \lim(x, A_\nu x) = \lim \sum_i \tilde{\nu}_i(x, P(\Delta_i^\nu)x) = \int \lambda \,\mathrm{d}(x, P_\lambda x),$$

což je Riemann-Stieltjesův integrál s distribuční funkcí $F(\lambda) = (x, P_\lambda x)$ a mírou $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$, a platí $F(x) = 0$ pro $\lambda < m$, $F(x) = \|x\|^2$ pro $\lambda > M$. Stejně tak je

$$(x, f(A)x) = \int f(\lambda) \,\mathrm{d}(x, P_\lambda x)$$

a

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^2 x) = \int \lambda^2 \,\mathrm{d}(x, P_\lambda x).$$

Věta 5. *Nechť $\{P_\lambda\}$ je rozklad jedničky a $A = \int \lambda \,\mathrm{d}P_\lambda$. Potom*

(i) $\lambda \in \varrho(A) \cap \mathbb{R}$, právě když P_λ je konstantní na nějakém okolí λ.
(ii) $\lambda \in \sigma_P(A)$, právě když $P_0 = P_{\lambda+0} - P_\lambda \neq 0$.

Navíc P_0 je ortogonální projektor na $\mathrm{Ker}(A - \lambda)$.

Důkaz. (1) (i) $\Leftarrow$: Položme $f = x - \lambda$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-\lambda} & |x - \lambda| \geq \varepsilon \\ \text{lineární} & |x - \lambda| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Zvolíme $\varepsilon > 0$ tak, aby P_λ byla konstantní na $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$. Zřejmě $f(A) = A - \lambda$, dále je $f(x)g(x) - 1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}(fg - 1) \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$, podle předchozích poznámek je tedy $(fg - 1)(A) = 0$ a $(A - \lambda)g(A) - I = f(A)g(A) - I = 0$, $(A - \lambda)g(A) = I$,protože je g omezené, $g(A) = (A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a tedy $\lambda \in \varrho(A)$.

(2) (i) $\Rightarrow$: Nechť $\lambda \in \varrho(A) \cap \mathbb{R}$, podle Weylova kritéria existuje $M > 0$ tak, že $\|(A - \lambda)x\| \geq M \|x\|$ pro každé x. Zvolme $\Delta = [\lambda - \frac{M}{2}, \lambda + \frac{M}{2})$. Stejně jako v důkazu věty 1 ukážeme nerovnost

$$\left(\lambda - \frac{M}{2}\right) P(\Delta) \leq P(\Delta)A \leq \left(\lambda + \frac{M}{2}\right) P(\Delta).$$

Tu lze přepsat ve tvaru

$$-\frac{M}{2} P(\Delta) \leq (A - \lambda)P(\Delta) \leq \frac{M}{2} P(\Delta).$$

Pokud $P(\Delta) \neq 0$, je $\|P(\Delta)\| = 1$ a musí platit

$$\|(A - \lambda)P(\Delta)\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, (A - \lambda)P(\Delta)x)| \leq \sup_{\|x\|=1} \frac{M}{2} |(x, P(\Delta)x)| = \frac{M}{2}.$$

Potom ale pro $x \in \mathrm{Ran}\, P(\Delta)$ platí

$$\frac{M}{2} \|x\| \geq \|(A - \lambda)P(\Delta)x\| = \|(A - \lambda)x\| \geq M \|x\|,$$

což je spor.

(3) (ii) Stačí dokázat, že $\mathrm{Ker}(A - \lambda) = \mathrm{Ran}\, P_0$
$\supset$: Buď $\mu > \lambda$, $P([\lambda, \mu)) = P_\mu - P_\lambda$,

$$P_0 = P_{\lambda+0} - P_\lambda = \operatorname*{s-lim}_{\mu \to \lambda+} P([\lambda, \mu)).$$

Opět

$$\lambda P([\lambda, \mu)) \leq AP([\lambda, \mu)) \leq \mu P([\lambda, \mu)).$$

Limitním přechodem $\mu \to \lambda+$ dostáváme $\lambda P_0 \leq AP_0 \leq \lambda P_0 \implies (A - \lambda)P_0 = 0$, což je ekvivalentní s inkluzí $\mathrm{Ran}\, P_0 \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda)$.

$\subset$: Buď $x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda)$. Potom

$$0 = \|(A-\lambda)x\|^2 = (x,(A-\lambda)^2 x) = \int (\mu-\lambda)^2 \,\mathrm{d}(x, P_\mu x),$$

z čehož plyne nulovost míry $(-\infty,\lambda)$ a $(\lambda,+\infty)$. Proto zobrazení $\mu \mapsto (x, P_\mu x)$ je konstantní pro $\mu < \lambda$ a $\mu > \lambda$. Z definice rozkladu jednotky proto musí být nutně $\|P_\mu x\|^2 = (x, P_\mu x) = 0$ pro $\mu < \lambda$ a $\|P_\mu x\|^2 = (x, P_\mu x) = \|x\|^2$ pro $\mu > \lambda$.
Z toho plyne, že

$$P_\mu x = \begin{cases} 0 & \mu < \lambda \\ x & \mu > \lambda. \end{cases}$$

Protože P_λ je spojité zleva, je $P_\lambda x = 0$ a

$$P_0 x = \lim_{\mu \to \lambda+} (P_\mu - P_\lambda)x = \lim_{\mu \to \lambda+} x = x.$$

Tedy $x \in \operatorname{Ran} P_0$ a $\operatorname{Ker}(A-\lambda) \subset \operatorname{Ran} P_0$.
Celkem $\operatorname{Ker}(A-\lambda) = \operatorname{Ran} P_0$ a z toho také plyne tvrzení (ii). $\square$