1 Systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

Zamyslete se:

Jaký tvar mají systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty?
Jak se řeší tyto úlohy?
Co je to metoda neurčitých koeficientů?
Co víme o jednoznačnosti?

$$\acute{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{b}$$

Příklad č.1

Řešte:

$$\begin{aligned} y' &= -5y + 2z + 40e^x \\ z' &= y - 6z + 9e^{-x} \end{aligned}$$

Z přednášky víme, že tato úloha je ekvivalentní s úlohou následující:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \acute{y} \\ z \end{pmatrix}}_{\acute{\vec{a}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 40e^x \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Charakteristický polynom matice A vypadá: $(-5-\lambda)\cdot(-6-\lambda) - 2 = (\lambda+4)\cdot(\lambda+7)$. Tedy kořeny jsou: $\lambda_1 = -4; \lambda_2 = -7$ Zjistím teď vlastní vektory matice:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (2,1) = \vec{v_1}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (1,-1) = \vec{v_2}$$

Tedy můžu napsat řešení bez pravé strany jako:

$$\begin{pmatrix} \acute{y} \\ z \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x}$$

a nyní očekávaným krokem známým z přednášky provedeme:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = (C_1' - 4C_1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + (C_2' - 7C_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x} = L(\vec{a})$$

$$L(\vec{a}) =$$

$$C_1 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x} + \begin{pmatrix} 40e^{x} \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}$$

Po upravení, rozložení a vynásobení matic zůstává rovnost:

$$C_1' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7x} = \begin{pmatrix} 40e^{x} \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}$$

Můžeme tedy zpátky zapsat do rovnic soustavu:

$$\begin{gathered} 2C_1'e^{-4x} + C_2'e^{-7x} = 40e^{x} \\ C_1'e^{-4x} - C_2'e^{-7x} = 9e^{-x} \end{gathered}$$

Z této soustavy mohu dále vyjádřit:

$$\begin{gathered} 3C_1' \cdot e^{-4x} = 40e^{x} + 9e^{-x} \\ C_1' = \tfrac{40e^{5x}+9e^{3x}}{3} \\ -3C_2'e^{-7x} = 40e^{x} - 18e^{-x} \\ C_2' = -\tfrac{40e^{8x}-18e^{6x}}{3} \end{gathered}$$

Dále:

$$\begin{gathered} C_1 = \tfrac{8}{3}e^{5x} + e^{3x} + K_1 \\ C_2 = -\tfrac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2 \end{gathered}$$

Mohu tedy zapsat $\vec{a}$ jako:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = (\frac{8}{3}e^{5x} + e^{3x} + K_1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x} + (-\frac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x}$$

Konečný výsledek je třeba zapsat ve tvaru:

$$\begin{gathered} y = (\tfrac{16}{3}e^{5x} + 2e^{3x} + 2K_1)e^{-4x} + (-\tfrac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2)e^{-7} \\ z = (\tfrac{8}{3}e^{5x} + e^{3x} + K_1)e^{-4x} - (-\tfrac{5}{3}e^{8x} + e^{6x} + K_2)e^{-7} \end{gathered}$$

A komu se tento výsledek nelíbí, může si jako procvičení klidně upravit do nějaké příjemnější podoby. Já už to přepisovat nebudu! Jen je opravdu třeba u zkoušky důležité, aby jste to přepsali tak, jak jsem to napsal na závěr já.

Příklad č.2

Řešte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5x - y - 4z \\ \dot{y} &= -12x + 5y + 12z \\ \dot{z} &= 10x - 3y - 9z \end{aligned}$$

Situaci máme ulehčenou o to, že hledáme pouze fundamentální systém. Na tomto příkladu si však ukážeme něco zajímavějšího. Nejprve budeme postupovat naprosto analogicky:

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zjistím vlastní čísla matice A:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -4 \\ -12 & 5-\lambda & 12 \\ 10 & -3 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(1-\lambda)(1+\lambda)$$

Pro ty, kdo by se s tímto determinantem trápili, první krok je přičtení prvního sloupce k poslednímu sloupci, dále pak stačí už jen vytknout z posledního sloupce $(1-\lambda)$ a dál už je to jen dopočítání. Problémem ale zůstává, že máme vlastní čísla $\lambda_1 = -1; \lambda_{2,3} = 1$. Co dál? Nejdříve pokud máme jedno vlastní číslo, můžeme spočíst k němu jeho vlastní vektor. Nechám na Vás. Je to $\vec{v_1} = (- 1, 2, -2)$.

Chceme-li úspěšně pokračovat v řešení tohoto příkladu, musíme si vzpomět na větu z přednášky, která „ v podstatě “ tvrdila, že pokud máme nějaké vlastní číslo o násobnosti $k > 1$, pak vektory řešení k tomuto číslu mají ve složkách polynomy stupně nejvýše $k-1$. Budeme tedy hledat řešení v tomto tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \cdot t \\ a_2 + b_2 \cdot t \\ a_3 + b_3 \cdot t \end{pmatrix} e^t = \vec{u}$$

a nyní dosadíme do rovnosti do zadání:

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \cdot t + b_1 \\ a_2 + b_2 \cdot t + b_2 \\ a_3 + b_3 \cdot t + b_3 \end{pmatrix} \cdot e^t = \begin{pmatrix} 5a_1 + 5b_1t - a_2 - b_2t - 4a_3 - 4b_3t \\ -12a_1 - 12b_1t + 5a_2 + 5b_2t + 12a_3 + 12b_3t \\ 10a_1 + 10b_1t - 3a_2 - 3b_2t - 9a_3 - 9b_3t \end{pmatrix} \cdot e^t$$

a nyní metodou neurčitých koeficientů stačí už jen sestavit šest následujících rovností:

$$\begin{gathered} a_1 + b_1 = 5a_1 - a_2 - 4a_3 \\ b_1 = 5b_1 - b_2 - 4b_3 \\ a_2 + b_2 = -12a_1 + 5a_2 + 12a_3 \\ b_2 = -12b_1 + 5b_2 + 12b_3 \\ a_3 + b_3 = 10a_1 - 3a_2 - 9a_3 \\ b_3 = 10b_1 - 3b_2 - 9b_3 \end{gathered}$$

A protože jste už velcí kucí, nechám dopočítání na Vás. Musím se přiznat, že počítal jsem to asi třikrát, nikdy mi to nevyšlo. :-) Měly by Vám vyjít dvě řešení, vypadjí asi takhle:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tedy aby to bylo vidět:

$$\vec{u^{(2)}} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 3 \\ 1+t \end{pmatrix} \cdot e^t$$
$$\vec{u^{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

A ještě závěrem přepíšu do finální podoby:
$x = -C_1e^{-t} + C_2(2+t)e^t + c_3e^t$
$y = 2C_1e^{-t} + 3c_2e^t$
$z = -2C_1e^{-t} + C_2(1+t)e^t + C_3e^t$

Příklad č.3

Řešte:

$\dot{x} = -y + z$
$\dot{y} = z$
$\dot{z} = -x + z$

Postup je pro začátek jednoznačný. Zjistíme, že charakteristický polynom je: $(\lambda^2 + 1)(1 - \lambda) = 0$. To ale znamená, že máme komplexní dva kořeny. A ještě navíc oba komplexně sdružené. Kořeny jsou: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i; \lambda_3 = -i$. Když ale máme jeden reálný kořen, resp.vlastní číslo, můžeme pro něj zjistit vlastní vektor. Přesvědčete se, že má složky $v_1 = (0, 1, 1)$. Můžu spočíst i další vlastní vektory, např.prvně pro i:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i-1 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Můžu tedy určit vlastní vektor této matice jako: $\vec{v_2} = (1 + i, 1, i)$. Podle přednášky ale taky vím, že další vlastní vektor bude komplexně sdružený, tedy: $\vec{v_3} = (1 - i, 1, -i)$. To bych měl ale komplexní fundamentální systém a to se mi nelíbí. Podle přednášky totiž vím, že „ když mám reálné zadání, existuje reálné řešení“ . Tak proč se stresovat s komplexním? Podle známé formule rozepsat $e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$ a tedy jedno z řešení je:

$$\vec{u_2}(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$$

Z přednášky dále vím, že pouze reálná část jednoho komplexního řešení z fundamentálního systému je taky řešením a to platí taky o imaginární části. Proto teď vezmu $\vec{v_2}$ a „vyrobím“ z něj další dvě řešení. Reálná.

$$Re(\vec{u_2}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}; Im(\vec{u_2}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

tedy mohu konečně zapsat reálné řešení ve finálním tvaru:

$x = C_2(\cos t - \sin t) + C_3(\cos t + \sin t)$
$y = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$
$z = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$

Příklad č.4

Řešte:

$\dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2$
$\dot{y} = -x + 1$
$\dot{z} = x + y - z - t + 1$

Poslední příklad nechám na Vás. Řešení nicméně je:

$x = -K_1 e^t + K_2 \cos t + K_3 \sin t$
$y = K_1 e^t - K_2 \sin t + K_3 \cos t + t$
$z = K_2 \cos t + K_3 \sin t + 1$