1 Několik receptů jak hádat řešení LDR n-tého řádu

Jak z přednášky víme, řešení těchto rovnic je součtem jednoho konkrétního řešení (partikulárního řešení) a dalšího libovolného řešení rce bez pravé strany. Za jistých okolností (v závislosti na tvaru rovnice a pravé strany) se dá ale toto řešení docela snadno uhodnout. Nyní si ukážeme tři nejzákladnější, z nichž poslední v sobě zahrnuje dva předešlé.

1.1 Rovnice tvaru $L(y) = P(x)$

Požadavek: 0 . . . k-násobný kořen polynomu P(x).

Řešení budeme hledat ve tvaru: $z(x) = x^k \cdot Q(x)$ kde Q(x) je polynom nejvýše stupně polynomu P(x).

Příklad č.1

Řešte:

$$y'' - y = x^2 - x + 1$$

Tedy charakteristický polynom je: $\lambda^2 - 1 = 0$. Proto můžu rovnou psát obecné řešení bez pravé strany jako:

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

Podle kuchařky teď budeme tedy hledat polynom druhého stupně. Nula je nulanásobný kořen (:-)) polynomu P(x), takže $x^0 = 1$ se v rovnici nevyskytuje. Hledaný polnynom má obecný předpis tento: $z(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Longrightarrow z''(x) = 2a$. Dosadíme do rovnice:

$$\begin{gathered} z'' - z = x^2 - x + 1 \\ 2a - a \cdot x^2 - b \cdot x - c = x^2 - x + 1 \end{gathered}$$

Prostým porovnáním koeficientů zjišťujeme, že $a = -1; b = 1; c = -3$. Partikulární řešení tedy je: $z(x) = -x^2 + x - 3$. Celkovým výsledkem tedy je:

$$y(x) = -x^2 + x - 3 + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

Příklad č.2

Řešte:

$$y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$$

Charakteristický polynom tedy je: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$. Tedy nula je jednonásobný kořen. Obecné řešení rce bez pravé strany je: $y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^4 x$. Budu hledat partikulární řešení ve tvaru:

$$\begin{gathered} z(x) = x(a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \\ z'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c \\ z''(x) = 6a \cdot x + 2b \\ \text{dosadím:} \\ 6a \cdot x + 2b - 12a \cdot x^2 - 8b - 4c = -12x^2 + 6x - 4 \end{gathered}$$

a opět porovnáním členů před mocninami x dostávám řešení:

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{4x} + x^3 + x$$

1.2 Rovnice tvaru $L(y) = e^{ax} \cdot P(x)$

Nechť a ... k-násobný kořen charakteristického polynomu. Pak hledáme řešení ve tvaru: $z(x) = x^k \cdot e^{ax} \cdot Q(x)$

Příklad č.1

Řešte:

$$y'' - 2y' + y = 4e^x$$

Stestavím char. polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, tedy $(\lambda - 1)^2 = 0$. Kořenem je pouze $\lambda = 1$, jedná se o dvojnásobný kořen. Tedy řešení rce bez pravé strany je: $y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 x \cdot e^x$. Budu hledat řešení tvaru: $z(x) = x^2 A e^x$.

$$\begin{gathered} z'(x) = 2xAe^x + x^2 Ae^x \\ z''(x) = A\Big(e^x(2 + 2x) + e^x(2x + x^2)\Big) = Ae^x(2 + 4x + x^2) \\ Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Ae^x(x^2 + 2x) + x^2 Ae^x = 4e^x \\ b = 2 \end{gathered}$$

Řešením tedy je:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x$$

Příklad č.2

Řešte:

$$y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$$

Tento příklad je trochu komplikovanější. Na pravé straně rovnice máme dva členy. Ale z přednášky víme, že bude stačit sečíst obě řešení jednotlivých případů. Začneme klasicky a prvně se mrkneme na exponencielu:

$$\begin{gathered}
F(\lambda) : \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 3 \\
y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} \\
z(x) = Axe^{3x} \\
z'(x) = Ae^{3x}(1 + 3x) \\
z'' = 3Ae^{3x}(2 + 3x) \\
\text{dosadím:} \\
3Ae^{3x}(2 + 3x) - 3Ae^{3x}(1 + 3x) = e^3 x \\
A = \tfrac{1}{3} \\
z(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} + \tfrac{1}{3} x e^{3x}
\end{gathered}$$

A nyní už jen zbývá dopočítat zbylé řešení. Protože je to ale už ten předešlý případ, nechám dopočítání na Vás samotných. Celkové řešení rovnice je:

$$y(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{3} x e^{3x} + C_1 + C_2 e^{3x}$$

1.3 Rovnice tvaru $L(y) = e^{ax}\{P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx\}$

Předpoklad: $a + ib \ldots$ k-násobný kořen $F(\lambda)$ Hledáme řešení ve tvaru: $z(x) = x^k e^{ax}\{Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\}$, kde Q_1, Q_2 jsou polynomy stejného stupně rovnému maximu stupňů polynomů P_1, P_2.

Příklad č.1

Řešte:

$$y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$$

Tedy víme, že: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Dále víme: $a = 0, b = 1$. Budeme tedy hledat řešení:

$$z(x) = A\cos x + A\sin x$$
$$z''(x) = -A\cos x - B\sin x$$
$$-2A\cos x - 2B\sin x = 2\sin x - 4\cos x$$

tedy víme: $A = 2, B = -1$. Můžu rovnou zapsat řešení jako:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2\cos x - \sin x$$

Příklad č.2

Řešte:

$$y'' + y = 4x\cos x$$

Dovolím si rovnou napsat fundamentální systém (ověřte): $\{e^{ix}, e^{-ix}\}$. Když víme, že: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, můžeme rovněž zapsat:

$$Re(e^{ix}) = \cos x$$
$$Im(e^{ix}) = \sin x$$

Můžu tedy sestavit reálný fundamentální systém: $\{\cos x; \sin x\}$. Dále víme, že $a = 0, b = 1$, takže budu hledat:

$$z(x) = x\Big\{(A_1x + B_1)\sin x + (A_2x + B_2)\cos x\Big\}$$

Dopočítání nechám na Vás samotných. Vyjde to: $z(x) = x(x\sin x + \cos x)$. Tedy celkové řešení je:

$$y(x) = x(x\sin x + \cos x) + C_1\cos x + C_2\sin x$$