1. Systémy lineárních diferenciálních rovnic. Lineární rovnice n-tého řádu

Systémem lineárních diferenciálních rovnic rozumíme systém rovnic

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x)\\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x)\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ i řešení jsou komplexní funkce reálné proměnné.

Tento systém lze zapsat i maticově jako $\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde

$$
\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.
$$

Věta 1 (o existenci a jednoznačnosti)**.** Nechť $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, kde $i, j \in \widehat{n}$ jsou komplexní funkce reálné proměnné, spojité na intervalu $\mathcal{I}$. Nechť $x \in \mathcal{I}$ a $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0} \in \mathbb{C}$. Označme

$$
\vec{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.
$$

Potom systém (1) má řešení

$$
\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}
$$

na intervalu $\mathcal{I}$, pro které platí, že $\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)}$. Toto řešení je jediné v tomto smyslu: Je-li

$$
\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix}
$$

řešení (1) na intervalu $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$, $x_0 \in \mathcal{I}_1$, pro které $\vec{z}(x_0) = y^{(0)}$, je $\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$ pro $x \in \mathcal{I}_1$.

Důkaz. Systém rovnic (1) je ekvivalentní s Cauchyovou počáteční úlohou

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)y_j(t) + b_1(t) \right) \mathrm{d}t + y_{10}\\
&\vdots\\
y_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)y_j(t) + b_n(t) \right) \mathrm{d}t + y_{n0}
\end{aligned}
$$

$$
\vec{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}^{(p)} = \begin{pmatrix} y_1^{(p)} \\ \vdots \\ y_n^{(p)} \end{pmatrix}, \qquad y_i^{(p)}(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j^{(p-1)}(t) + b_i(t) \right) \mathrm{d}t + y_{i0}.
$$

Chceme dokázat, že $\vec{y}^{(p)}$ stejnoměrně konvergují k $\vec{y}(x)$ pro $x \in \mathcal{I}$, přičemž $\vec{y}(x)$ splňuje (1). Dokážeme, že na každém $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ uzavřeném a obsahujícím x_0 $\vec{y}^{(p)}(x) \rightrightarrows \vec{y}(x)$, která splňuje (1).

Označme L délku $\mathcal{I}_0$. Z omezenosti a_{ij}, b_i plyne $|a_{ij}(x)| \le K$, $|b_i(x)| \le K$. Označme $Y = \max(|y_{10}|, |y_{20}|, \dots, |y_{n0}|)$. Platí, že

$$\left|y_i^{(p+1)}(x) - y_i^{(p)}(x)\right| \le (1+nY)\frac{n^p K^{p+1} |x-x_0|^{p+1}}{(p+1)!} \le \left(\frac{1}{n}+Y\right)\frac{(nKL)^{p+1}}{(p+1)!}.$$

To dokážeme matematickou indukcí:

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}(x)\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_{j0} + b_i(t)\right| \mathrm{d}t\right| \le (nKY + K)\,|x-x_0| =$$
$$= (1+nY)K\,|x-x_0|,$$

$$\left|y_i^{(p+1)}(x) - y_i^{(p)}(x)\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\left(y_i^{(p)}(t) - y_i^{(p-1)}(t)\right)\right| \mathrm{d}t \le$$
$$\le (1+nY)\frac{n^p K^{p+1}}{p!}\int_{x_0}^{x} |t-x_0|^p \,\mathrm{d}t.$$

Potom je

$$\lim_{p\to\infty} \vec{y}^{(p)}(x) = \lim_{p\to\infty}\left[\vec{y}^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{p}\left(\vec{y}^{(i)}(x) - \vec{y}^{(i-1)}(x)\right)\right].$$

Řada má konvergentní majorantu

$$\left(\frac{1}{n}+Y\right)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(nKL)^i}{i!} = \left(\frac{1}{n}+Y\right)\left[e^{nKL}-1\right],$$

tudíž posloupnost $\vec{y}^{(k)}(x)$ na uzavřeném $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ stejnoměrně konverguje.

Jednoznačnost dokážeme sporem. Mějme funkce $\vec{y}(x), \vec{z}(x)$ takové, že $\vec{z}(x_0) = \vec{y}^{(0)}$, $\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)}$ a nechť neplatí, že $\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$ pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Dokážeme, že na každém uzavřeném intervalu $\vec{y}(x) = \vec{z}(x)$. Po dosazení do Cauchyovy počáteční úlohy dostaneme

$$y_i(x) - z_i(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\left(y_j(t) - z_j(t)\right)\mathrm{d}t\right)$$

pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Dále je díky spojitosti $|a_{ij}(x)| \le A$, $|y_i(x) - z_i(x)| \le K$ pro $i \in \widehat{n}$. Dokážeme, že pro $\forall p \in \mathbb{N}_0$ je

$$|y_i(x) - z_i(x)| \le K\frac{(nA\,|x-x_0|)^p}{p!}.$$

To provedeme indukcí, pro $p = 0$ to platí z předpokladu,

$$|y_i(x) - z_i(x)| \le \int_{x_0}^{x}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\left(y_j(t) - z_j(t)\right)\right| \mathrm{d}t \le K\frac{(nA)^p}{p!}\cdot An\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^p\,\mathrm{d}t =$$
$$= K\frac{(nA\,|x-x_0|)^{p+1}}{(p+1)!}.$$

V limitě pak

$$\lim_{p\to\infty} K\frac{(nA\,|x-x_0|)^p}{p!} = 0. \quad \square$$

Poznámka. Jsou-li funkce $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ a počáteční podmínka reálné, je i řešení $\vec{y}(x)$ reálná funkce reálné proměnné.

1.1. **Řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.** Lineární rovnice n-tého řádu

$$y_n^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{2}$$

je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2\\
y_2' &= y_3\\
&\vdots\\
y_n' &= -p_1(x)y_n - p_2(x)y_{n-1} - \ldots - p_n(x)y_1 + q(x),
\end{aligned}$$

kde $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$.

Věta 2. Nechť $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), q(x)$ jsou komplexní funkce reálné proměnné spojité v intervalu $\mathcal{I}$. Buďte $x_0 \in \mathcal{I}$ a $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ komplexní čísla. Pak existuje řešení $y(x)$ rovnice (2) v intervalu $\mathcal{I}$, které splňuje podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$,…, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Je-li $z(x)$ řešení (2) na intervalu $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$, $x_0 \in \mathcal{I}_1$ a platí $z(x_0) = y_0$, $z'(x_0) = y_0', \ldots, z^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, platí také $z(x) = y(x)$ pro každé $x \in \mathcal{I}_1$.

Jak nalézt všechna řešení (2): Lineární diferenciální rovnicí bez pravé strany rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0. \tag{3}$$

Operátor

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y$$

nazýváme **lineární diferenciální operátor**. Linearita ($L(cy) = cL(y)$, $L(y+z) = L(y) + L(z)$) je zřejmá. Soustavy (2) resp. (3) lze pomocí tohoto operátoru zapsat jako $L(y) = q(x)$ resp. $L(y) = 0$.

Poznámka. (1) Jsou-li funkce $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ řešením (3), je řešením i jejich lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x).$$

Důkaz. Protože $L(y_i) = 0$, je

$$L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i L(y_i) = 0. \quad \square$$

(2) Je-li $z(x)$ řešením (2), pak $y(x) + z(x)$ je řešením (2), právě když $y(x)$ je řešením (3).

Důkaz. (a) ($\Rightarrow$) $L(y+z) = q,\ L(z) = q \implies L(y) = L((y+z) - z) = L(y+z) - L(z) = 0.$
(b) ($\Leftarrow$) $L(y) = 0 \implies L(y+z) = L(y) + L(z) = q.$ $\square$

Řešení hledáme tak, že nalezneme všechna řešení y (3) a jedno (partikulární) řešení z rovnice (2). Každé řešení (2) má tvar $y + z$.

1.1.1. *Nalezení všech řešení rovnice bez pravé strany.*

Definice 3. Nechť je dáno n funkcí $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ definovaných na intervalu $\mathcal{I}$. Řekneme, že jsou **lineárně závislé na** $\mathcal{I}$, existují-li čísla $c_1, \ldots, c_n$ ne všechna rovná nule tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. Jestliže funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ nejsou lineárně závislé, řekneme, že jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Jsou-li funkce lineárně nezávislé na $\mathcal{I}$, jsou lineárně nezávislé i na $\mathcal{I}_1$, kde $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_1$.

Definice 4. Nechť $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ mají na $\mathcal{I}$ derivace až do $(n-1)$-tého řádu. Funkci

$$W(x) = W_{f_1,f_2,\dots,f_n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazýváme **Wronského determinantem (wronskiánem)** funkcí $f_1, f_2, \dots, f_n$ na $\mathcal{I}$.

Věta 5. jestliže funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ mají na intervalu $\mathcal{I}$ derivace do $(n-1)$-tého řádu a jestliže jsou na $\mathcal{I}$ lineárně závislé, je $W_{f_1,f_2,\dots,f_n}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$.

Důkaz. Soustava rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 f_1(x) & + & c_2 f_2(x) & + & \cdots & + & c_n f_n(x) & = & 0 \\ c_1 f_1'(x) & + & c_2 f_2'(x) & + & \cdots & + & c_n f_n'(x) & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) & + & c_2 f_2^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n f_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}$$

má netriviální řešení, takže $\det = W = 0$. □

Poznámka. Větu obecně nelze obrátit — např. funkce $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \left|x^3\right|$ na intervalu $(-a, a)$ nejsou lineárně závislé. Přitom pro $x = 0$ je $W = 0$, pro $x > 0$ je

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

a i pro $x < 0$ je

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Poznámka. (1) $y = 0$ řeší (3).

(2) Pokud existuje řešení $Y(x)$ rovnice (3) takové, že $Y(x_0) = Y'(x_0) = \cdots = Y^{(n-1)}(x_0) = 0$, pak $Y(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$, plyne to z jednoznačnosti řešení.

(3) Nechť $y_1(x), \dots, y_n(x)$ řeší (3). Jsou-li lineárně závislé, je $W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Existuje-li $x_0 \in \mathcal{I}$ tak, že $W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) = 0$, existují $c_1, \dots, c_n$ tak, že

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & c_2 y_2(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n(x_0) & = & 0 \\ c_1 y_1'(x_0) & + & c_2 y_2'(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n'(x_0) & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0 \end{array}$$

Buď $Y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0)$. Protože $Y(x)$ řeší (3) a $Y(x_0) = Y'(x_0) = \cdots = Y^{(n-1)}(x_0) = 0$, je $c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Důsledkem je následující věta.

Věta 6. Nechť $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešení (3) na intervalu $\mathcal{I}$. Potom jejich Wronského determinant je buď všude roven nule nebo všude různý od nuly. V prvním případě jsou funkce lineárně závislé, v druhém nezávislé.

Definice 7. Systém $y_1(x), \dots, y_n(x)$ n řešení rovnice (3) (n-tého řádu) se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (3), pokud jsou funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ lineárně nezávislé na $\mathcal{I}$, tj. pokud $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ na $\mathcal{I}$.

Věta 8. Je-li $y_1(x), \dots, y_n(x)$ fundamentální systém řešení rovnice (3) na intervalu $\mathcal{I}$, lze každé řešení $y(x)$ rovnice (3) na $\mathcal{I}$ vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

a to jediným způsobem.

Důkaz. Nechť $y_1(x),\dots,y_n(x),y(x)$ řeší (3) a $y_1(x),\dots,y_n(x)$ tvoří fundamentální systém. Buď dále $x_0\in\mathcal{I}$. Položme $c_1,\dots,c_n$ rovny řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1y_1(x_0) & + & c_2y_2(x_0) & + & \cdots & + & c_ny_n(x_0) & = & y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) & + & c_2y_2'(x_0) & + & \cdots & + & c_ny_n'(x_0) & = & y'(x_0) \\ & & & & & & & \vdots & \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & y^{(n-1)}(x_0). \end{array}$$

Funkce

$$z(x)=y(x)-c_1y_1(x)-\ldots-c_ny_n(x)$$

je lineární kombinací $y_1(x),\dots,y_n(x),y(x)$, tudíž také řeší (3). Protože

$$z(x_0)=z'(x_0)=\cdots=z^{(n-1)}(x_0)=0,$$

je $z(x)=0$ pro každé $x\in\mathcal{I}$.

Jednoznačnost dokážeme sporem. Předpokládejme, že

$$y(x)=d_1y_1(x)+\cdots+d_ny_n(x),$$

pro každé $x\in\mathcal{I}$ a existuje j takové, že $c_j\neq d_j$. Pak ale musí platit

$$0=(d_1-c_1)y_1(x)+\cdots+(d_n-c_n)y_n(x).$$

Protože jsou funkce $y_1(x),\dots,y_n(x)$ lineárně nezávislé, musí být $c_i=d_i$ pro každé $i\in\widehat{n}$, což je spor. □

Poznámka. Na $\mathcal{I}_1\subset\mathcal{I}$ je to také fundamentální systém.

Věta 9. Rovnice (3) má fundamentální systémy. Jsou-li $y_1(x),\dots,y_n(x)$ řešení (3) a je-li

$$Y_1(x)=\sum_{j=1}^n c_{1j}y_j(x),\ \ Y_2(x)=\sum_{j=1}^n c_{2j}y_j(x),\dots,Y_n(x)=\sum_{j=1}^n c_{nj}y_j(x),$$

platí

$$W_{Y_1,\dots,Y_n}(x)=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{vmatrix} W_{y_1,\dots,y_n}(x)$$

a tedy $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ tvoří fundamentální systém, právě když

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Důkaz. Označme $z_1(x),\dots,z_n(x)$ funkce, pro které platí

$$\begin{array}{lllll} L(z_1)=0 & z_1(x_0)=1 & z_1'(x_0)=0 & \dots & z_1^{(n-1)}(x_0)=0 \\ L(z_2)=0 & z_2(x_0)=0 & z_2'(x_0)=1 & \dots & z_2^{(n-1)}(x_0)=0 \\ \vdots & & & & \\ L(z_n)=0 & z_n(x_0)=0 & z_n'(x_0)=0 & \dots & z_n^{(n-1)}(x_0)=1. \end{array}$$

Platí, že $W_{z_1,z_2,\dots,z_n}=|\mathbf{I}|=1$. Protože

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) \\ \vdots \\ Y_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x)\end{pmatrix},$$

z aditivity derivace je

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ Y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) & \dots & Y_1^{(k)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_n(x) & \dots & Y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_1^{(k)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n(x) & \dots & y_n^{(k)}(x) \end{pmatrix},$$

tedy $W_{Y_1,\dots,Y_n}(x) = |c_{ij}|\, W_{y_1,\dots,y_n}(x)$. □

Poznámka. Jsou-li $p_1(x), \dots, p_n(x)$ reálné funkce, rovnice (3) může mít i komplexní řešení $y(x) = u(x) + \mathbf{i}v(x)$, pak ale i $u(x)$ a $v(x)$ jsou řešení (3), neboť $L(u + \mathbf{i}v) = 0 \implies L(u) + \mathbf{i}L(v) = 0 \implies L(u) = 0 \wedge L(v) = 0$. Kromě toho má i řešení $u - \mathbf{i}v$.

Lemma 10. Je-li funkce $A(x)$ definována vztahem

$$A(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

pak

$$A'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1}(x) & \dots & a_{i-1,n}(x) \\ a'_{i1}(x) & \dots & a'_{in}(x) \\ a_{i+1,1}(x) & \dots & a_{i+1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Věta 11. Nechť $y_1(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešení (3) na intervalu $\mathcal{I}$, nechť $x_0 \in \mathcal{I}$. Potom

$$W_{y_1,\dots,y_n}(x) = W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t}.$$

Důkaz. Podle předchozího lemmatu je

$$W'_{y_1,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-2}(x) & \dots & y_n^{n-2}(x) \\ y_1^{n}(x) & \dots & y_n^{n}(x) \end{vmatrix},$$

neboť všechny sčítance až na poslední jsou nulové (determinanty obsahují dva stejné řádky). Do posledního řádku dosadíme

$$y_i^{(n)} = -p_1(x) y_i^{(n-1)}(x) - p_2(x) y_i^{(n-2)}(x) - \dots - p_n(x) y_i(x)$$

a přičteme k poslednímu odpovídající násobky předchozích řádků tak, abychom zrušili všechno až na $-p_1(x) y_i^{(n-1)}(x)$, z posledního řádku vytkneme $-p_1(x)$ a dostaneme tak

$$W'_{y_1,\dots,y_n}(x) = -p_1(x) W_{y_1,\dots,y_n}(x),$$

takže

$$\frac{W'}{W} = -p_1(x),$$

$$\ln|W| = -\int p_1(x)\mathrm{d}x + \ln C,$$

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t},$$
$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t}. \quad \square$$

Poznámka. Máme-li lineární rovnici n-tého řádu bez pravé strany a máme-li $n+1$ a více řešení, jsou lineárně závislé.

Věta 12. Buďte $y_1, \dots, y_n$ funkce, které mají v intervalu $\mathcal{I}$ spojité derivace až do řádu n a nechť $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathcal{I}$. Potom existuje právě jedna rovnice (3) se spojitými koeficienty $p_i(x)$, která má řešení $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Je to rovnice

$$\frac{W_{y,y_1,y_2,\dots,y_n}(x)}{W_{y_1,y_2,\dots,y_n}(x)} = 0.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme jednoznačnost. Buď

$$y^{(n)} + r_1(z)y^{(n-1)} + \dots + r_n(x)y = 0 \tag{4}$$

jiná rovnice, které také vyhovují řešení $y_1, \dots, y_n$. Buď k první index takový, že $p_k(x) - r_k(x) \neq 0$. Potom, protože $p_i(x), r_i(x)$ jsou spojité, existuje $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ takový, že $p_k(x) - r_k(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Odečtením (3) a (4) dostaneme

$$(p_k(x) - r_k(x))y^{(n-k)}(x) + \dots + (p_n(x) - r_n(x))y(x) = 0 \tag{5}$$

pro každé $x \in \mathcal{I}_1$. Funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a řeší (5), takže mám víc LN řešení než koeficientů, což je spor. V případě, že se rovnice liší pouze u posledního koeficientu, dostaneme $(p_n(x) - r_n(x))y(x) = 0$, což sice není diferenciální rovnice, ale dvě LN řešení také neexistují.

Platí, že

$$W_{y,y_1,y_2,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_n \\ y' & y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Po dosazení libovolné funkce $y_1, y_2, \dots, y_n$ dostaneme $W = 0$, neboť v matici budou dva stejné sloupce. Rozvinutím podle prvního sloupce a vydělením dostaneme rovnici typu (3). Algebraické doplňky jsou spojité a koeficient u $y^{(n)}$ se zkrátí. $\square$

1.1.2. *Lineární rovnice s pravou stranou, metoda variace konstant.* Buď

$$z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

řešení rovnice (3). Pokusíme se najít funkce $c_i(x)$ tak, aby funkce

$$z(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

řešila rovnici (2). Hledáme tak n konstant, zatím máme pouze jednu podmínku. Dalších $n-1$ podmínek vyrobíme tak, že předchozí vztah budeme postupně derivovat. Po prvním derivování dostaneme

$$z'(x) = c_1(x)y_1'(x) + \dots + c_n(x)y_n'(x) + c_1'(x)y_1(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x).$$

Aby se dalo jednoduše derivovat dál, položíme podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} c_1'(x)y_i(x) = 0.$$

Dalším derivováním dostaneme

$$z'(x) = c_1(x)y_1''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x)$$

a položíme

$$\sum_{i=1}^{n} c_1'(x)y_i'(x) = 0.$$

Nakonec dostaneme

$$z^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + \\ + c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)^{(n-2)}(x),$$

$(n-1)$-tá podmínka je

$$\sum_{i=1}^{n} c_1'(x)y_i^{(n-2)}(x) = 0.$$

Protože

$$z^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) + c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

a v důsledku předchozích podmínek je

$$L(z) = c_1(x)L(y_1) + c_2(x)L(y_2) + \cdots + c_n(x)L(y_n) + \\ + c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'^{(n-1)}(x) = q(x).$$

Protože $L(y_i) = 0$, dostáváme poslední podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = q(x).$$

1.2. **Lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty.** Rovnice tvaru

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = q(x), \tag{6}$$

kde $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ a $q(x)$ je spojitá funkce $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Za $y(x)$ dosadíme $e^{\lambda x}$. Potom dostaneme

$$a_0\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_n e^{\lambda x} = 0,$$

tedy

$$\left(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\right) e^{\lambda x} = 0,$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. Rovnici $F(\lambda) = 0$, kde $F(\lambda) = a_0\lambda^n + \cdots + a_n$ nazýváme **charakteristickou rovnicí**, $F(\lambda)$ je **charakteristický polynom**.

Věta 13. Nechť μ je k-násobný kořen $F(\lambda)$. Pak řešením lineární diferenciální rovnice jsou $e^{\mu x}, xe^{\mu x}, x^2e^{\mu x}, \ldots, x^{k-1}e^{\mu x}$.

Důkaz. Buď $y(x) = e^{\mu x}z(x)$, $L(y) = e^{\mu x}M(z)$, kde M je lineární diferenciální operátor stejného řádu jako L.

$$L(y) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}y^{(l)} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\left[\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\mu^i z^{(l-i)}e^{\mu x}\right] = \\ = \underbrace{\left[\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\sum_{i=0}^{l}\left(\binom{l}{i}\mu^i z^{(l-i)}\right)\right]}_{M(z)} e^{\mu x}.$$

Buď $G(\lambda)$ charakteristický polynom $M(z)$. Potom

$$G(\lambda) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\underbrace{\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\mu^i\lambda^{l-i}}_{(\lambda+\mu)^l} = F(\lambda+\mu).$$

Protože μ je k-násobný kořen F, je $F(x) = (x-\mu)^k\widehat{F}(x)$, kde $\widehat{F}$ je polynom. Dále je $F(\lambda+\mu) = \lambda^k\widehat{F}(\lambda+\mu)$, tedy G má k-násobný kořen 0. Potom G musí mít tvar

$$G(\lambda) = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_{n-k}\lambda^k$$

a M má tvar

$$M(z) = A_0 z^{(n)} + A_1 z^{(n-1)} + \cdots + A_{n-k}z^{(k)}.$$

Rovnice $M(z) = 0$ má zřejmě řešení $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$, takže $L(y) = 0$ má řešení $e^{\mu x}, xe^{\mu x}, \dots, x^{k-1}e^{\mu x}$.

Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ kořeny charakteristického polynomu a $k_1, k_2, \dots, k_p$ jejich násobnosti, tj. $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$. Buď dále systém řešení

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \dots, & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_p x}, & xe^{\lambda_p x}, & \dots, & x^{k_p-1}e^{\lambda_p x}. \end{array} \tag{7}$$

Ukážeme, že řešení (7) jsou lineárně nezávislá na intervalu $\mathcal{I}$. Nejprve ale dokážeme následující lemma. □

Lemma 14. Nechť $P_1(x), P_2(x), \dots, P_r(x)$ jsou nenulové polynomy a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ vzájemně různá čísla. Pak na každém intervalu $\mathcal{I}$ (obsahujícím alespoň 2 body) neplatí, že

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_r(x)e^{\lambda_r x} = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí. Je-li $P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$, je nutně $P_1(x) = 0$. Předpokládáme, že r-členná relace platí, potom je

$$P_1(x) = -P_2(x)e^{\lambda_2 x - \lambda_1 x} - P_3(x)e^{\lambda_3 x - \lambda_1 x} - \dots - P_r(x)e^{\lambda_r x - \lambda_1 x}. \tag{8}$$

Buď $\mu_i = \lambda_i - \lambda_1$, platí, že $\mu_i \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{r} \setminus \{1\}$. Protože platí

$$\left(P_i(x)e^{\mu_i x}\right)^{(k+1)} = Q_i(x)e^{\mu_i x},$$

$(k+1)$-tým derivováním (8) dostaneme

$$0 = Q_2(x)e^{\mu_2 x} + \dots + Q_r(x)e^{\mu_r x},$$

tedy $(r-1)$-členná relace by musela rovněž platit, což je spor. □

Předpokládejme nyní rovnost

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left[\sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}x^j\right]}_{P_i(x)} e^{\lambda_i x} = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$. Z předchozího lemmatu vyplývá, že všechny polynomy $P_i(x)$ jsou nulové, tudíž $c_{ij} = 0$. Z toho plyne, že řešení (7) jsou lineárně nezávislá a tvoří fundamentální systém.

Pro rovnici s reálnými koeficienty existuje reálný fundamentální systém. Nalezený fundamentální systém ale není reálný, protože kořeny charakteristického polynomu mohou být komplexní. Víme ovšem, že pokud je kořenem $a + \mathbf{i}b$, je kořenem i $a - \mathbf{i}b$. Pokud fundamentální systém obsahuje dvojici řešení

$$y_1(x) = x^k e^{(a+\mathbf{i}b)x}, \quad y_2(x) = x^k e^{(a-\mathbf{i}b)x}.$$

Tuto dvojici ze systému odstraníme a místo ní zařadíme

$$z_1(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2}, \quad z_2(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2\imath},$$

tedy

$$z_1(x) = x^k e^{ax} \cos bx, \quad z_2(x) = x^k e^{ax} \sin bx.$$

Je potřeba dokázat, že i nový systém je fundamentální. Platí, že

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2\imath & 1/2\imath & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

a protože

$$W_{z_1,z_2,y_3,\ldots,y_n} = -\frac{1}{2_1} W_{y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n} \neq 0$$

a protože $W_{y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n} \neq 0$, je to fundamentální systém.

1.3. **Systémy lineárních diferenciálních rovnic.** Systémem lineárních rovnic rozumíme systém

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x). \tag{9}$$

Systémem lineárních rovnic bez pravé strany rozumíme systém

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y}. \tag{10}$$

Zavádíme **lineární diferenciální operátor** $L(\vec{y}) = \vec{y}' - \mathbf{A}(x)\vec{y}$. Platí-li $L(\vec{z}) = \vec{b}(x)$ a $L(\vec{y}) = \vec{\theta}$, je $\vec{z} + \vec{y}$ řešením (9). Jsou-li $\vec{y}$, $\vec{z}$ řešení (9), pak $\vec{z} - \vec{y}$ řeší (10).

1.3.1. *Nalezení všech řešení systému bez pravých stran.*

(1) Nulový vektor $\vec{\theta}$ je řešením (10).
(2) Jestliže řešení $\vec{y}(x)$ splňuje v bodě $x_0 \in \mathcal{I}$ podmínku $\vec{y}(x_0) = \vec{\theta}$, pak z jednoznačnosti řešení plyne, $\vec{y}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$.
(3) Jsou-li $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \ldots, \vec{y}^{(n)}$ řešení (10), pak

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \vec{y}^{(i)}(x)$$

je řešení (10).

Buďte $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \ldots, \vec{y}^{(n)}$ funkce takové, že

$$\vec{y}^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(i)}(x) \\ y_2^{(i)}(x) \\ \vdots \\ y_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}.$$

Potom definujeme wronskián

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\ldots,\vec{y}^{(n)}}(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \ldots & y_2^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Věta 15. Jsou-li funkce $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \ldots, \vec{y}^{(n)}$ lineárně závislé na intervalu $\mathcal{I}$, potom v každém bodě $x \in \mathcal{I}$ je

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\ldots,\vec{y}^{(n)}}(x) = 0.$$

Důkaz. Nechť existují $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne všechna rovná nule taková, že pro každé $x \in \mathcal{I}$ je

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x) = \vec{\theta},$$

tedy pro každé $x \in \mathcal{I}$ a $i \in \widehat{n}$ je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_i^{(j)}(x) = 0.$$

To je systém s maticí stejnou jako je matice W a má netriviální řešení, tedy $W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\ldots,\vec{y}^{(n)}}(x) = 0$. □

Poznámka. Předchozí větu nelze obecně obrátit, například funkce x a x^2 jsou lineárně nezávislé, ale

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Platí však následující věta.

Věta 16. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ jsou řešení (10) na intervalu $\mathcal{I}$. Jestliže alespoň v jednom bodě $x_0 \in \mathcal{I}$ je

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}(x_0) = 0,$$

jsou $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ lineárně závislé.

Důkaz. Buď $W(x_0) = 0$. Potom existují $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne všechna rovná nule taková, že

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \vec{y}^{(j)}(x_0) = 0$$

Buď

$$\vec{Y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x).$$

Platí, že $\vec{Y}(x_0) = \vec{\theta}$ a proto z jednoznačnosti $\vec{Y}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Proto platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x) = 0$$

pro každé $x \in \mathcal{I}$ a tedy funkce jsou lineárně závislé. □

Přímým důsledkem dvou předchozích vět je následující věta.

Věta 17. Jsou-li $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ řešení systému (10) na intervalu $\mathcal{I}$, potom $W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}$ je buď pro každé $x \in \mathcal{I}$ různý od nuly nebo je pro každé $x \in \mathcal{I}$ roven nule. První případ nastává, když jsou řešení lineárně nezávislá, druhý, když jsou lineárně závislá.

Definice 18. Fundamentálním systémem řešení systému (10) nazýváme každých n lineárně nezávislých řešení (10).

Věta 19. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ je fundamentální systém řešení (10). Pak každé řešení $\vec{y}(x)$ systému (10) lze psát ve tvaru

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}^{(1)}(x) + c_2 \vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n \vec{y}^{(n)}(x),$$

kde c_i jsou konstanty, které jsou řešením $\vec{y}(x)$ určený jednoznačně.

Důkaz. Buď $x_0 \in \mathcal{I}$. Protože řešení tvoří fundamentální systém, je $W(x_0) \neq 0$. Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_i^{(j)}(x_0) = y_i(x_0)$$

pro každé $i \in \widehat{n}$. Protože matice soustavy je regulární, je soustava jednoznačně řešitelná. Definujme

$$\vec{Y} = \vec{y}(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}^{(i)}(x).$$

Protože $\vec{Y}$ je lineární kombinace řešení systému (10), řeší i $\vec{Y}$ systém (10). Protože $\vec{Y}(x_0) = 0$, je $\vec{Y}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{I}$. Nakombinovali jsme tak řešení $\vec{y}$ z fundamentálního systému.

Nechť také platí

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{y}^{(i)}(x).$$

Potom

$$\vec{\theta} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i) \vec{y}^{(i)}(x),$$

proto musí platit $d_i = c_i$ pro $i \in \widehat{n}$. □

Věta 20. Existují fundamentální systémy řešení systému (10), při reálných $a_{ij}(x)$ existují reálné fundamentální systémy.

Důkaz. Buď $x_0 \in \mathcal{I}$. Buďte dále $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ řešení taková, že $\vec{y}^{(1)}(x_0) = e^{(1)}, \vec{y}^{(2)}(x_0) = e^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}(x_0) = e^{(n)}$. Potom $W_{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}}(x_0) = 1$. □

Věta 21. Nechť $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ jsou řešení (10). Nechť

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

je daná matice. Položme

$$\vec{z}^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \vec{y}^{(j)}(x) \tag{11}$$

pro každé $i \in \widehat{n}$. Pak funkce $\vec{z}^{(i)}(x)$ jsou opět řešení (10) a platí

$$W_{\vec{z}^{(1)}, \dots, \vec{z}^{(n)}} = \det \Gamma W_{\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n)}}$$

a tudíž $\vec{z}^{(1)}, \vec{z}^{(2)}, \dots, \vec{z}^{(n)}$ je fundamentální systém, právě když $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ je fundamentální systém a $\det \Gamma \neq 0$.

Důkaz. Vztah (11) je ekvivalentní vztahu

$$(\vec{z}^{(1)}, \vec{z}^{(2)}, \dots, \vec{z}^{(n)}) = (\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}) \Gamma^T.$$

Z toho vyplývá, že každá z funkcí $\vec{z}^{(1)}, \vec{z}^{(2)}, \dots, \vec{z}^{(n)}$ je lineární kombinací funkcí $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$. Současně z toho vyplývá vztah pro determinanty. □

Věta 22. Pro libovolnou n-tici řešení $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ systému (10) a bod $x_0 \in \mathcal{J}$ platí

$$W_{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}}(x) = W_{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}}(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \tau(\mathbf{A}(t)) \mathrm{d}t},$$

kde $\tau(\mathbf{A}(x)) = a_{11}(x) + a_{22}(x) + \dots + a_{nn}(x) = \operatorname{Tr} \mathbf{A}(x)$ je stopa matice $\mathbf{A}(x)$.

Důkaz. Pro derivaci wronskiánu platí podle lemmatu 10

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W_{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{k-1}^{(1)}(x) & y_{k-1}^{(2)}(x) & \dots & y_{k-1}^{(n)}(x) \\ y_k^{(1)\prime}(x) & y_k^{(2)\prime}(x) & \dots & y_k^{(n)\prime}(x) \\ y_{k+1}^{(1)}(x) & y_{k+1}^{(2)}(x) & \dots & y_{k+1}^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Na i-tém místě v derivovaném řádku je zderivovaná k-tá složka i-tého řešení, která vyhovuje k-té rovnici systému:

$$y_k^{(i)\prime} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j^{(i)}(x).$$

Tento vztah dosadíme za derivace a odečteme od derivovaného řádku vhodné násobky ostatních tak, aby tam zůstal pouze k-tý sčítanec. k-tý řádek determinantu bude pak mít tvar

$$\begin{vmatrix} a_{kk}(x) y_k^{(1)} & a_{kk}(x) y_k^{(2)} & \dots & a_{kk}(x) y_k^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Potom platí, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x) W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} = W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} \tau(\mathbf{A}(x)).$$

Pro $W = 0$ věta platí, pokud $W \neq 0$, je to separovatelná rovnice a její řešení je (z počátečních podmínek $C = W(x_0)$)

$$W = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \tau(\mathbf{A}(t)) \mathrm{d}t}. \quad \square$$

Věta 23. Nechť funkce $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ splňují vztah

$$W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}} \neq 0$$

pro $x \in \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I}$ je interval, a mají na $\mathcal{I}$ spojité derivace. Pak existuje právě jeden systém tvaru (10), jehož jsou fundamentálním systémem. Je to systém

$$\begin{vmatrix} y_i' & {y_i^{(1)}}' & {y_i^{(2)}}' & \dots & {y_i^{(n)}}' \\ y_1' & {y_1^{(1)}}' & {y_1^{(2)}}' & \dots & {y_1^{(n)}}' \\ y_2' & {y_2^{(1)}}' & {y_2^{(2)}}' & \dots & {y_2^{(n)}}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n' & {y_n^{(1)}}' & {y_n^{(2)}}' & \dots & {y_n^{(n)}}' \end{vmatrix} \frac{1}{W_{\vec{y}^{(1)},\vec{y}^{(2)},\dots,\vec{y}^{(n)}}} = 0$$

pro každé $i \in \widehat{n}$.

Důkaz. První část dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ řeší různé systémy $\vec{y}^{(i)} = \mathbf{A}(x)\vec{y}^{(i)}$ i $\vec{y}^{(i)} = \mathbf{B}(x)\vec{y}^{(i)}$. Potom $(\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x))\vec{y}^{(i)}(x) = 0$ pro každé $i \in \widehat{n}$, tedy

$$(\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x)) \underbrace{(\vec{y}^{(1)}(x), \vec{y}^{(2)}(x), \dots, \vec{y}^{(n)}(x))}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}.$$

Matice $\mathbf{Y}$ je regulární, neboť funkce jsou lineárně nezávislé, proto existuje $\mathbf{Y}^{-1}$, po vynásobení rovnice $\mathbf{Y}^{-1}$ zprava dostaneme $\mathbf{A}(x) - \mathbf{B}(x) = \mathbf{0}$, tedy matice $\mathbf{A}(x)$ a $\mathbf{B}(x)$ jsou stejné, což je spor.

Rozvinutím matice podle 1. sloupce dostaneme systém typu (10). Po dosazení libovolného $\vec{y}^{(i)}$ za $\vec{y}$ rovnost platí. $\square$

1.4. **Systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.** Systém $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{b}(x)$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

1.4.1. *Nalezení fundamentálního systému.* Řešení systému $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$ se pokusíme hledat ve tvaru $\vec{y}(x) = \vec{v}e^{\lambda x}$; $\lambda \vec{v} e^{\lambda x} = \mathbf{A}\vec{v}e^{\lambda x}$. Pokud je $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná, jsou $\vec{v}$ vlastní vektory. Pokud ne, je to složitější.

Věta 24. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ řádu n s algebraickými násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_p$, $k_1 + k_p + \dots + k_p = n$. Pak systém diferenciálních rovnic $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$ má fundamentální systém řešení tvaru

$$\begin{matrix} \vec{y}_1^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x}, & \vec{y}_2^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x}, & \dots & \vec{y}_{k_2}^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x}, \\ \vec{y}_1^{(2)}(x)e^{\lambda_2 x}, & \vec{y}_2^{(2)}(x)e^{\lambda_2 x}, & \dots & \vec{y}_{k_2}^{(2)}(x)e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{y}_1^{(p)}(x)e^{\lambda_p x}, & \vec{y}_2^{(p)}(x)e^{\lambda_p x}, & \dots & \vec{y}_{k_p}^{(p)}(x)e^{\lambda_p x}, \end{matrix}$$

kde $y_j^{(i)}(x)$ je n vektorů, jejichž složky jsou polynomy stupně nejvýše $j - 1$ (nebo jsou nulové).

Důkaz. Existuje regulární matice $\mathbf{T}$ taková, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{TJT}^{-1}$, kde $\mathbf{J}$ je matice v Jordanově normálním tvaru. Vynásobením rovnice $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} = \mathbf{TJT}^{-1}$ maticí $\mathbf{T}^{-1}$ zleva dostaneme $\mathbf{T}^{-1}\vec{y}' = \mathbf{JT}^{-1}\vec{y}$. Označme $\vec{z} = \mathbf{T}^{-1}\vec{y}$ a uvažujme systém $\vec{z}' = \mathbf{J}\vec{z}$. Pokud najdeme fundamentální systém výše uvedených vlastností systému $\vec{z}' = \mathbf{J}\vec{z}$, odpovídá mu fundamentální systém stejných vlastností systému $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}$, neboť lineární kombinací polynomů stupně k dostaneme opět polynom stupně k.

Matice $\mathbf{J}$ má blokový tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1^{(1)} & & & & & \\ & J_2^{(1)} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_{k_1}^{(1)} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_{k_p}^{(p)} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{J}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Systém $\vec{z}' = \mathbf{J}\vec{z}$ má tedy tvar ($q := k_1$)

$$\begin{array}{rcl} z_1' &=& \lambda_1 z_1 \\ z_2' &=& z_1 + \lambda_1 z_2 \\ z_3' &=& z_2 + \lambda_1 z_3 \\ \vdots & & \ddots \\ z_q' &=& z_{q-1} + \lambda_1 z_q \\ z_{q+1}' &=& \lambda_2 z_{q+1} \\ z_{q+2}' &=& z_{q+1} + \lambda_2 z_{q+2} \\ \vdots & & \ddots \end{array}$$

Hledání fundamentálního systému jsme tak rozložili na dílčí problémy. Nyní řešíme systém

$$\begin{array}{rcl} z_1' &=& \lambda_1 z_1 \\ z_2' &=& z_1 + \lambda_1 z_2 \\ z_3' &=& z_2 + \lambda_1 z_3 \\ \vdots & & \ddots \\ z_q' &=& z_{q-1} + \lambda_1 z_q. \end{array}$$

Tady $z_i' = z_{i-1} + \lambda_1 z_i$. Zavedeme substituci $z_i(x) = e^{\lambda_1 x} u_i(x)$, dosazením vyjde

$$z_i' = e^{\lambda_1 x} u_{i-1} + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u_i$$

a derivací identity vyjde

$$z_i' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} u_i + e^{\lambda_1 x} u_i'$$

a tedy $u_i' = u_{i-1}$. Tento systém má q lineárně nezávislých řešení, například

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \\ \frac{x^3}{3!} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} \end{pmatrix}.$$

Řešení celého systému pak jsou

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_1 x},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\0\\1\\x\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_1 x},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\\x\\\frac{x^2}{2!}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_1 x},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\\x\\\frac{x^2}{2!}\\\frac{x^3}{3!}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_1 x},\dots,\begin{pmatrix}1\\x\\\frac{x^2}{2!}\\\vdots\\\frac{x^{q-1}}{(q-1)!}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_1 x},\dots\qquad\square$$

Poznámka. Je-li λ_1 k_1-násobné vlastní číslo, existuje skupina k_1 lineárně nezávislých řešení tvaru $\vec{y}(x)e^{\lambda_1 x}$, kde $\vec{y}(x)$ má za své složky polynomy stupně nejvýše $k_1 - 1$.

To umožňuje hledat fundamentální systémy metodou „neurčitých koeficientů“. Za $\vec{y}(x)$ dosadíme součin $\vec{z}(x)e^{\lambda_1 x}$, kde $\vec{z}(x)$ je „polynomiální“ vektor. V každé rovnici dostaneme rovnost dvou polynomů stupně nejvýše $k_1 - 1$.

1.4.2. *Metoda variace konstant.* Buď $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ fundamentální systém systému (10). Předpokládáme partikulární řešení systému s pravou stranou

$$c_1(x)\vec{y}^{(1)}(x) + c_2(x)\vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n(x)\vec{y}^{(n)}(x).$$

Dosazením do systému dostaneme

$$\begin{aligned}&c_1'(x)\vec{y}^{(1)}(x) + c_2'(x)\vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n'(x)\vec{y}^{(n)}(x) +\\&\quad + c_1(x)\vec{y^{(1)}}'(x) + c_2(x)\vec{y^{(2)}}'(x) + \dots + c_n(x)\vec{y^{(n)}}'(x) =\\&= c_1(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(1)}(x) + c_2(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(2)}(x) + \dots + c_n(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(n)}(x) + \vec{b}(x)\end{aligned}$$

a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\vec{y}^{(i)}(x) = \vec{b}(x),$$

protože $c_i(x)\vec{y^{(i)}}'(x) = c_i(x)\mathbf{A}(x)\vec{y}^{(i)}(x)$ pro každé $i \in \widehat{n}$. Matice soustavy je regulární, existuje proto právě jedno řešení. Soustavu vyřešíme Cramerovým pravidlem. Protože všechny funkce $\vec{y}^{(i)}$ i $\vec{b}$ jsou spojité, bude spojité i řešení.