## 1. Řešení některých speciálních rovnic 1. řádu

1.1. **Řešení rovnice $y' = f(x,y)$.** Rovnici tvaru $y' = f(x,y)$ nazýváme rovnicí ve tvaru vyřešeném vzhledem k 1. derivaci. Křivku $f(x,y) = c$ nazýváme **isoklina**.

1.2. **Rovnice se separovanými proměnnými.** Rovnicí se separovanými proměnnými rozumíme rovnici tvaru

$$P(x) + Q(y)y' = 0, \tag{1}$$

kde $P(x)$ a $Q(y)$ jsou spojité funkce jedné reálné proměnné.

**Věta 1.** Nechť $P(x)$ je spojitá na intervalu $\mathcal{I} = (a,b)$ a $Q(y)$ spojitá na intervalu $\mathcal{K} = (c,d)$. Potom

(1) každé řešení rovnice (1) na intervalu $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$ splňuje rovnici

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C \tag{2}$$

pro nějaké $C$.

(2) Každá funkce implicitně definovaná vztahem (2) při libovolném $C$ na intervalu $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}$, která má na intervalu $\mathcal{I}_2$ derivaci, je řešením (1).

*Důkaz.* (1) ($\Rightarrow$) Integrováním rovnice a substitucí $y = u(x)$ okamžitě dostáváme

$$C = \int (P(x) + Q(u(x))u'(x))\mathrm{d}x = \int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y.$$

(2) ($\Leftarrow$) Buď $F'(x) = P(x)$, $G'(y) = Q(y)$, nechť platí $F(x) + G(y) = C$, $F(x) + G(z(x)) = C$. Potom pro derivaci musí platit

$$P(x) + Q(z(x))z'(x) = 0$$

. □

**Věta 2.** Nechť $P(x)$ je spojitá na $(a,b)$, $Q(y)$ spojitá na $(c,d)$, nechť $Q(y) \neq 0$ pro $y \in (c,d)$. Potom každým bodem oblasti $(a,b) \times (c,d)$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice (1) (tj. je-li $[x_0, y_0] \in (a,b) \times (c,d)$ existuje právě jedno řešení (1) splňující rovnici $y(x_0) = x_0$).

*Důkaz.* (1) Buďte $F'(x) = P(x)$, $G'(y) = Q(y)$, nechť funkce $y(x)$ vyhovuje rovnici $F(x) + G(y(x)) = C$. Současně musí platit $F(x_0) + G(y_0) = C$, celkem tedy musí $y(x)$ splňovat rovnici $F(x) + G(y(x)) = F(x_0) + G(y_0)$. Díky spojitosti parciálních derivací lze $y(x)$ z této rovnice explicitně vyjádřit.

(2) Buďte $y_1(x), y_2(x)$, $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ různá řešení (1) na $(\alpha, \beta) \ni x_0$. Potom musí platit

$$P(x) + Q(y_1(x))y_1'(x) = P(x) + Q(y_2(x))y_2'(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y_1(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y_2(x)),$$

tedy $G(y_1(x)) = G(y_2(x)) + C$. Protože tato rovnice musí platit i pro $x = x_0$, jedinou možnou hodnotou $C$ je $C = 0$. Protože $Q$ je spojitá a $Q(x) \neq 0$, je $G$ prostá, tudíž $y_1(x) = y_2(x)$, což je spor. □

1.3. **Separovatelné rovnice.** Separovatelnou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)y' = 0,$$

kde $P_1, Q_1$ jsou spojité na $(a,b)$ a $P_2, Q_2$ jsou spojité na $(c,d)$. Za předpokladu $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$ lze tuto rovnici převést na rovnici tvaru

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}y' = 0.$$

Označme $a_1, a_2, \ldots, a_m \in (a,b)$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n \in (c,d)$ nulové body $Q_1$ resp. $P_2$. Řešením původní rovnice jsou i konstantní křivky $y = b_i$ na $(a,b)$.

Při určování definičního oboru je nutné ověřit případné průsečíky s konstantami.

## 1.4. **Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu.**

**Definice 3.** Funkce $n$ reálných proměnných $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nazývá **homogenní stupně** $k$, platí-li, že

$$F(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Rovnici

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0, \tag{3}$$

kde $P, Q$ jsou homogenní funkce stejného stupně $k$ nazýváme **homogenní rovnicí stupně** $k$. K řešení vede substituce $y = xu$, kde $u$ je nová neznámá funkce. Ta převede původní rovnici na rovnici

$$P(x, xu) + Q(x, xu)(u + xu') = 0,$$

$$x^k[P(1,u) + Q(1,u)(u + xu')] = 0,$$

která je separovatelná.

**Věta 4.** Nechť $0 \notin M \subset \mathbb{R}$. Je-li $u(x)$ řešení rovnice

$$P(1,u) + Q(1,u)u + xQ(1,u)u' = 0, \tag{4}$$

je $y(x) = xu(x)$ řešením rovnice (3). Je-li $y$ řešením rovnice (3) na $M$, existuje $u(x)$, které je řešením (4) na $M$ tak, že $y(x) = xu(x)$.

*Poznámka.* Zavádí se také **zobecněné homogenní (kvazihomogenní) rovnice**. Ty se řeší substitucí $y = x^\alpha \cdot u$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Této substituce je možné využít, pokud lze po substituci vytknout $x$ z každého členu diferenciální rovnice ve stejné mocnině.

## 1.5. **Rovnice tvaru** $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$**.** U rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) \tag{5}$$

rozlišíme následující případy:

(1) $\alpha = \beta = a = b = 0$: Potom

$$y' = f\left(\frac{c}{\gamma}\right),$$

tedy

$$y = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)x + C.$$

(2) $b = \beta = 0$: Potom

$$y' = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right),$$

$$y(x) = \int f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right) + C.$$

(3) $c = \gamma = 0$:

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right),$$

tato rovnice je homogenní.

(4) Neplatí $b = \beta = 0$, ale je

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Buď $b \neq 0$, pak $a\beta - \alpha b = 0$ a $\alpha = \frac{\beta}{b}a$ a rovnici upravíme na tvar

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\frac{\beta}{b}(ax+by)+\gamma}\right)$$

a dále na

$$z' = a + bf\left(\frac{z+c}{\frac{\beta}{b}z+\gamma}\right). \tag{6}$$

Funkce $y(x)$ je řešením (5) na množině $M$, právě když $z(x) = ax + by(x)$ je řešením (6).

(5) Platí, že

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + c &= 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

a zavedeme substituci

$$\begin{aligned} u &= x - x_0 & \qquad x &= x_0 + u \\ v &= y - y_0 & \qquad y &= y_0 + v. \end{aligned}$$

Platí

$$v(u) = y(x) - y_0 = y(x_0+u) - y_0 \implies y(x) = v(x - x_0) + y_0.$$

Substitucí dostaneme

$$\begin{aligned} v' = y' &= f\left(\frac{a(x_0+u) + b(y_0+v) + c}{\alpha(x_0+u) + \beta(y_0+v) + \gamma}\right) = \\ &= f\left(\frac{au + bv + ax_0 + by_0 + c}{\alpha u + \beta v + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma}\right) = f\left(\frac{au+bv}{\alpha u + \beta v}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Je-li $v(u)$ řešením rovnice (7), pak $y(x) = y_0 + v(x - x_0)$ je řešením rovnice (5) a naopak ke každému řešení $y(x)$ rovnice (5) lze nalézt řešení (7) tak, že daný vztah platí.

1.6. **Lineární diferenciální rovnice 1. řádu.** Rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{8}$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou spojité na $(a, b)$.

(1) Řešení rovnice bez pravé strany: Mějme rovnici $y' + p(x)y = 0$. Tuto rovnici zřejmě řeší $y(x) = 0$ pro každé $x$. Po vydělení $y$ (předpokládáme $y \neq 0$) dostaneme

$$\frac{y'}{y} + p(x) = 0,$$

což je ekvivalentní s rovnicí

$$\ln|y| + \int p(x)\mathrm{d}x = \ln K.$$

Po odlogaritmování dostaneme

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

což je **obecné řešení rovnice bez pravé strany** pro každé $C$.

**Věta 5.** Je-li $p(x)$ spojitá na $(a, b)$, prochází každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (-\infty, +\infty)$ právě jedna integrální křivka rovnice $y' + p(x)y = 0$, která je řešením rovnice na celém $(a, b)$.

*Důkaz.* Obecné řešení má tvar

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x},$$

bodem $[x_0, y_0]$ prochází pouze

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x}.$$

Osou $x$ prochází právě $y = 0$. □

(2) Metoda variace konstanty: Předpokládejme, že $C$ závisí na $x$

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

tedy

$$C(x) = y(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Dosazením za $y$ do (8) obdržíme

$$\underbrace{C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)}_{y'} + p(x)\underbrace{C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y} = q(x),$$

po úpravě

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x),$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C.$$

Obecné řešení rovnice s pravou stranou je

$$y(x) = \left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C\right] e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

**Věta 6.** Nechť $p(x)$, $q(y)$ jsou funkce spojité na $(a,b)$. Potom pro libovolné $C$ je funkce

$$y(x) = \left[\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C\right] e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{9}$$

řešením rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ na $(a,b)$. Každým bodem $[x_0, y_0] \in (a,b) \times (-\infty, +\infty)$ prochází právě jedna integrální křivka, která je řešením na $(a,b)$ a je popsána rovnicí tvaru (9) pro vhodnou volbu $C$.

**Věta 7.** Obecné řešení lineární diferenciální rovnice s pravou stranou je součtem obecného (homogenního) řešení rovnice bez pravé strany a libovolného pevně zvoleného řešení rovnice s pravou stranou (partikulárního řešení).

1.7. **Bernoulliho rovnice.** Rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{10}$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité na $(a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokud je $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 1$, je to lineární rovnice prvního řádu. Jinak opět $y = 0$ triviálně řeší, za předpokladu $y \neq 0$ můžeme rovnici upravit na

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x),$$

dále substitucí $z = y^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ na

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$$

a

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \tag{11}$$

**Věta 8.** Nechť $\alpha \neq 0, 1$. Nechť $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité na $(a,b)$, $q(x)$ není na $(a,b)$ identická 0. nechť $z(x)$ je řešením (11) na $(a,b)$. Pak každá funkce $y(x)$ splňující na intervalu $\mathcal{I} \subset (a,b)$ rovnici $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$ a taková, že na svém definičním oboru je $y(x) \neq 0$ a existuje $y'(x)$ na $\mathcal{I}$ je řešením (10) na $\mathcal{I}$.

Naopak nechť $y(x)$ je řešení (10) na $\mathcal{I} \subset (a,b)$ a $y(x) \neq 0$ na $\mathcal{I}$. Pak existuje řešení $z(x)$ rovnice (11) na $\mathcal{I}$ takové, že $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$.

1.8. **Riccatiho rovnice.**

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2, \tag{12}$$

kde $a_0, a_1, a_2$ jsou spojité funkce na $(a, b)$. Je-li $a_0 \equiv 0$, je to Bernoulliho rovnice, je-li $a_2 \equiv 0$, je to lineární rovnice.

(1) Substituce $x = \varphi(t)$, kde $\varphi$ má spojité derivace na $(c, d)$, $\varphi(c, c) \subset (a, b)$, **nezabere**,
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\varphi'(t) = a_0(\varphi(t))\varphi'(t) + a_1(\varphi(t))\varphi'(t)y + a_2(\varphi(t))\varphi'(t)y^2$$
protože dostaneme jenom novou Riccatiho rovnici.

(2) Substituce
$$y = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$
kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mají spojité derivace na $(c, d) \subset (a, b)$ a je
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$
také nezabere.
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}[(\alpha z' + \alpha' z + \beta')(\gamma z + \delta) - (z'\gamma + \gamma' z + \delta')(\alpha z + \beta)] = \\ &= \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}[(\alpha\delta - \gamma\beta)z' + (\alpha'\gamma - \gamma'\alpha)z^2 + \\ &\quad + (\alpha'\delta + \beta'\gamma - \gamma'\beta - \delta'\alpha)z + (\beta'\delta - \delta'\beta)] \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 = \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2}&[a_0(\gamma z + \delta)^2 + a_1(\gamma z + \delta)(\alpha z + \beta) + \\ &+ a_2(\alpha z + \beta)^2]. \end{aligned}$$
Abychom se v nové rovnici zbavili $z^2$, musí platit
$$\alpha'\gamma - \gamma'\alpha - a_0\gamma^2 - a_2\alpha^2 - a_1\gamma\alpha = 0,$$
$$\frac{\alpha'\gamma - \gamma'\alpha}{\gamma^2} - a_0 - a_2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - a_1\frac{\alpha}{\gamma} = 0,$$
$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)' - a_0 - a_2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 - a_1\frac{\alpha}{\gamma} = 0.$$
Dostali jsme opět pouze jinou Riccatiho rovnici.

(3) Kanonický tvar Riccatiho rovnice: U $y^2$ je koeficient $\pm 1$ a $y$ v rovnici nevystupuje. Prvního lze dosáhnout substitucí
$$y = \omega(x)z,$$
$$\omega z' + z\omega' = a_0 + a_1\omega z + a_2\omega^2 z^2,$$
$$z' = \frac{a_0}{\omega} + \left(a_1 - \frac{\omega'}{\omega}\right)z + a_2\omega z^2,$$
z čehož dostáváme podmínku pro $\omega(x)$
$$\omega = \pm\frac{1}{a_2(x)}.$$
Nulového koeficientu u $y$ dosáhneme substitucí $y = u + \alpha$, tím rovnice přejde na
$$u' = [a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 - \alpha'] + (a_1 + 2a_2\alpha) + a_2u^2,$$
tedy $\alpha$ musí být
$$\alpha(x) = -\frac{a_1(x)}{2a_2(x)}.$$

(4) Známe-li jedno řešení $y_1(x)$ na $(a,b)$, umíme najít zbývající. Buď $y_1(x)$ řešení Riccatiho rovnice
$$y_1'(x) = a_0(x) + a_1(x)y_1(x) + a_2(x)y_1^2(x).$$
Zavedeme substituci
$$u(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)},$$
za předpokladu $u(x) \neq 0$ je
$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}.$$
Po dosazení dostaneme
$$\begin{aligned} y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} &= a_0 + a_1\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + a_2\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 = \\ &= a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + \frac{a_1}{u} + \frac{2a_2y_1}{u} + \frac{a_2}{u^2} \end{aligned},$$
takže
$$u' + (a_1 + 2a_2y_1)u + a_2 = 0.$$
Tím jsme Riccatiho rovnici převedli na lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

(5) Vztah Riccatiho rovnice a lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Uvažujme lineární diferenciální rovnici 2. řádu
$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x), \quad p_0(x) \neq 0.$$
Buďte $a_0, a_1, a_2, a_2'$ spojité na $(a,b)$, $a_2(x) \neq 0$, $y(x)$ řešení Riccatiho rovnice na $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$. Zavedeme substituci
$$u(x) = e^{-\int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x},$$
$$u'(x) = -a_2(x)y(x)u(x).$$
Z této rovnice vyjádříme $y$
$$y(x) = \frac{-u'(x)}{a_2(x)u(x)}$$
a derivováním výrazu
$$\frac{u'}{u} = -a_2y$$
dostaneme
$$\frac{u'u - u'^2}{u^2} = -a_2'y - a_2y'.$$
Vynásobíme to $u^2$
$$u''u - u'^2 = (-a_2'y - a_2y')u^2,$$
dosadíme za $y'$
$$u''u - u'^2 = [-a_2'y - a_2(a_0 + a_1y + a_2y^2)]u^2,$$
dosadíme $u'(x) = -a_2(x)y(x)u(x)$, vynásobíme $a_2/u$
$$u''u = -a_2'yu^2 - a_2a_0u^2 - a_2a_1yu^2,$$
$$a_2u'' = -a_2'a_2yu - a_2^2a_0u - a_2^2a_1yu,$$
dosadíme za $y$
$$a_2u'' = a_2'u' - a_2^2a_0u + a_2a_1u'.$$
Řešení Riccatiho rovnice vyhovuje lineární diferenciální rovnici 2. stupně

(13)
$$a_2u'' - [a_2' + a_1a_2]u' + a_2^2a_0u = 0. \tag{13}$$

**Věta 9.** Nechť $a_0(x), a_1(x), a_2(x), a_2'(x)$ jsou spojité na $(a, b)$. Nechť $y(x)$ řeší (12). Potom funkce

$$u(x) = e^{-\int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x}$$

je řešením (13) na $(\alpha, \beta)$. Naopak, nechť $u(x)$ je řešením (13) na $(\gamma, \delta) \subset (a, b)$ a $u(x) \neq 0$, $a_2(x) \neq 0$ pro $x \in (\gamma, \delta)$. Potom

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{a_2(x)u(x)}$$

je řešením (12) na $(\gamma, \delta)$.

(6) Speciální Riccatiho rovnice:

$$y' + ay^2 = bx^\alpha,$$

kde $a, b \neq 0$ jsou konstanty, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro $\alpha = 0$ je to separovatelná rovnice, pro $\alpha = -2$ dostaneme po substituci

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{a}{u^2} = \frac{b}{x^2}$$

homogenní rovnici

$$u' = a - b\left(\frac{u}{x}\right)^2.$$

Jinak zavedeme substituci

$$y = u(x)z + v(x)$$

$$u'z + uz' + v' + a(u^2z^2 + 2uvz + v^2) = bx^\alpha$$

$$uz' + (u' + 2auv)z + (v' + av^2) + au^2z^2 = bx^\alpha.$$

Položme $v' + av^2 = 0$ a $u' + 2auv = 0$. Potom

$$-\frac{v'}{v^2} = a \implies v(x) = \frac{1}{ax}$$

$$u' + 2auv = u' + \frac{2u}{x} = 0 \implies u(x) = \frac{1}{x^2}$$

Zavedeme tedy substituci

$$y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{ax}.$$

Dostaneme

$$\frac{z'}{x^2} + a\frac{1}{x^4}z^2 = bx^\alpha,$$

$$z' + \frac{a}{x^2}z^2 = bx^{\alpha+2}.$$

Za $z$ dosadíme

$$z = \frac{1}{z_1},$$

$$-\frac{z_1'}{z_1^2} + \frac{a}{x^2z_1^2} = bx^{\alpha+2},$$

to vynásobíme $z_1^2$

$$z_1' + bx^{\alpha+2}z_1^2 = \frac{a}{x^2}.$$

Rovnici přetransformujeme do nové proměnné $x_1 = x^{\alpha+3}$, $x = x_1^{\frac{1}{\alpha+3}}$, za předpokladu $\alpha \neq -3$, $x > 0$. Pro derivace platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = (\alpha+3)x^{\alpha+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} = \frac{1}{(\alpha+3)x^{\alpha+2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

původní rovnici upravíme na

$$\frac{z_1'}{x^{\alpha+2}} + bz_1^2 = \frac{a}{x^{\alpha+4}}$$

a po transformaci obdržíme

$$(\alpha+3)\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_1}+bz_1^2=ax_1^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}.$$

Po úpravě máme novou Riccatiho rovnici, ale s jiným $\alpha$.

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_1}+\frac{b}{\alpha+3}z_1^2=\frac{a}{\alpha+3}x_1^{\alpha_1},$$

kde

$$\alpha_1=-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}.$$

Chceme dojít k $\alpha_1=-2$ nebo $\alpha_1=0$. Pro $\alpha_1=-2$ je $\alpha=-2$, pro $\alpha_1=0$ je $\alpha=-4$. Napíšeme rekurentní vztah

$$\alpha_k=-\frac{\alpha_{k-1}+4}{\alpha_{k-1}+3}$$

$$\alpha_k+2=-\frac{\alpha_{k-1}+4}{\alpha_{k-1}+3}+2\frac{\alpha_{k-1}+3}{\alpha_{k-1}+3}=\frac{\alpha_{k-1}+2}{\alpha_{k-1}+3}$$

$$\frac{1}{\alpha_k+2}=\frac{\alpha_{k-1}+3}{\alpha_{k-1}+2}=1+\frac{1}{\alpha_{k-1}+2}=k+\frac{1}{\alpha+2}.$$

Pro $\alpha_k=0$ ($\alpha_k=-2$ nemá význam, protože se nikam nehnu) dostaneme

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\alpha+2}+k \implies \alpha=\frac{-4k}{2k-1},$$

kde $k=0,1,2,\dots$. Pokud zvolíme opačný směr rekurze

$$\frac{1}{\alpha+2}=k+\frac{1}{\alpha_{-k}+2},$$

dostaneme

$$\alpha=\frac{-4k}{2k+1},$$

kde $k=1,2,\dots$. Celkem tedy můžeme nalézt řešení pro

$$\alpha=\frac{-4k}{2k-1},$$

kde $k\in\mathbb{Z}$. Lze dokázat, že pro jiná $\alpha$ to nejde. Kromě toho lze řešení této rovnice převést na tvar $y''+qx^\alpha y=0$, kde $q$ je konstanta.

### 1.9. Diferenciální rovnice tvaru $x=f(y')$ resp. $y=g(y')$.

(1) Rovnice typu $x=f(y')$. Rovnici parametrizujeme $y'=t$, $x=f(t)$. Potom po substituci $\mathrm{d}x=f'(t)\mathrm{d}t$ dostaneme

$$y=\int y'\mathrm{d}x+C=\int t\mathrm{d}x+C=\int tf'(t)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau+C.$$

**Věta 10.** Nechť funkce $f(t)$ má v intervalu $(t_1,t_2)$ spojitou kladnou (resp. zápornou) derivaci, nechť

$$a=\inf_{t\in(t_1,t_2)}f(t) \qquad b=\sup_{t\in(t_1,t_2)}f(t)$$

(resp. $a=-\infty$ pro $f$ neomezenou zdola, $b=+\infty$ pro $f$ neomezenou shora). Pak každým bodem $[x_0,y_0]\in(a,b)\times(-\infty,+\infty)$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice $x=f(y')$, jejíž tečna má směrnici z intervalu $(t_1,t_2)$ a je řešením rovnice na celém $(a,b)$. Parametrické rovnice této křivky jsou

$$x=f(t)$$

$$y=\int_{t_0}^{t}\tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau+y_0,$$

kde $t \in (t_1, t_2)$. Platí, že $f(t_0) = x_0$.

*Důkaz.* Protože funkce $f$ je prostá, rovnici $x = f(y')$ lze převést na tvar $y' = f^{-1}(x)$, což je rovnice se separovatelnými proměnnými. Z toho okamžitě plyne existence a jednoznačnost řešení.

Integrováním a použitím počátečních podmínek dostaneme

$$y(x) = \int f^{-1}(x)\mathrm{d}x + C = \int\limits_{x_0}^{x} f^{-1}(\xi)\mathrm{d}\xi + y_0.$$

Položením $x = f(t)$, $x_0 = f(t_0)$ a po substituci $x = f(\tau)$, $\mathrm{d}x = f'(\tau)\mathrm{d}t$ máme

$$y = \int\limits_{f(t_0)}^{f(t)} f^{-1}(\xi)\mathrm{d}\xi + y_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau + y_0. \quad \square$$

(2) Rovnice typu $y = g(y')$. Parametrizace $y' = t$, $y = g(t)$.

$$x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C = \int \frac{1}{t} g'(t)\mathrm{d}t + C = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau + x_0.$$

**Věta 11.** Nechť funkce $g(t)$ má na intervalu $(t_1, t_2)$ spojitou kladnou (resp. zápornou) derivaci. Nechť $0 \notin (t_1, t_2)$. Označme

$$\alpha = \inf_{t \in (t_1, t_2)} g(t) \qquad \beta = \sup_{t \in (t_1, t_2)} g(t)$$

(resp. $\alpha = -\infty$, resp. $\beta = +\infty$). Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in (-\infty, +\infty) \times (\alpha, \beta)$ prochází právě jedna integrální křivka, která je řešením rovnice na intervalu $(a, b)$, kde

$$a = x_0 + \inf_{t \in (t_1, t_2)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau, \qquad b = x_0 + \sup_{t \in (t_1, t_2)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau,$$

přičemž $t_0$ je definováno vztahem $y_0 = g(t_0)$. Parametrické rovnice křivky jsou:

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$y = g(t) + y_0,$$

kde $t \in (t_1, t_2)$.

*Důkaz.* Funkce $g$ je prostá, tudíž existuje inverzní funkce $g^{-1}$, tedy $y' = g^{-1}(y)$ a pokud $y' \neq 0$

$$\frac{y'}{g^{-1}(y)} = 1.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, z čehož plyne existence a jednoznačnost řešení.

Integrací a z počátečních podmínek dostaneme

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{g^{-1}(y)} + C = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{g^{-1}(\eta)}.$$

Dosadíme $y = g(t)$, $y_0 = g(t_0)$ a zavedeme substituci $\eta = g(\tau)$, $\mathrm{d}\eta = g'(\tau)\mathrm{d}\tau$.

$$x = x_0 + \int\limits_{g(t_0)}^{g(t)} \frac{\mathrm{d}\eta}{g^{-1}(\eta)} = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau. \quad \square$$

Na závěr se musí vyšetřit případ, kdy $y' = 0$ a to je tehdy když $y_0 = g(0)$, takže je to konstantní řešení.