1. Moduly a lineární algebry

1.1. Moduly

▶ 1.1.1. Definice. Mějme aditivní grupu $G = (M, +)$ a množinu skalárů $S \neq \emptyset$. Pro každé $\alpha \in S$ definujeme endomorfismus značený stejně $\alpha : G \to G$. Pak systém $G_S := (G, S)$ nazýváme grupa s operátory.

▶ 1.1.2. Definice. Přípustnou podgrupou grupy s operátory nazveme takové $H \Subset G$, že $(\forall \alpha \in S)(\forall a \in H^\bullet)(\alpha a \in H^\bullet)$.

▶ 1.1.3. Příklad.

(1) Mějme libovolnou grupu G a množinu celých čísel $\mathbb{Z}$ jako skaláry. Definujme pro $k \in \mathbb{Z}$ a $x \in G^\bullet$ hodnotu $kx := k \times x$. Pak $G_\mathbb{Z}$ je grupa s operátory.

(2) Nechť G je Abelova grupa. Označme $\mathcal{E}_G$ množinu všech endomofrismů a definujme pro $h, g \in \mathcal{E}_G$ operace $(h \oplus g)(x) := h(x) + g(x)$ a $(h \odot g)(x) := h(g(x))$. Pak $(\mathcal{E}_G, \oplus, \odot)$ tvoří okruh nazývaný okruh endomorfismů. Pak přípustnou podgrupou grupy s operátory $G_{\mathcal{E}_G}$ je taková podgrupa, která je uzavřená vůči všem endomorfismům. Přípustné podgrupy $G_{\mathcal{E}_G}$ se nazývají úplně charakteristické.

(3) Přípustné podgrupy $G_{\mathcal{A}_G}$ se nazývají charakteristické.

(4) Přípustné podgrupy $G_{\mathcal{I}_G}$ se nazývají normální. (Narozdíl od $\mathcal{E}_G$ nejsou $\mathcal{A}_G$ ani $\mathcal{I}_G$ okruhy, přesto mohou jejich prvky být skaláry.)

▶ 1.1.4. Definice. Modulem rozumíme grupu s operátory G_R, kde R je asociativní okruh s jednotkou a $(\forall \alpha, \beta \in R^\bullet)(\forall a \in G^\bullet)\big((\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \wedge \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a\big)$. Modul G_R nazveme unitární, pokud $1 \cdot a = a$.

▶ 1.1.5. Definice. Unitární modul G_R nazveme vektorovým prostorem, pokud R je tělesem.

▶ 1.1.6. Příklad. Vezměme $G = R_+$ a $R = R$. Pak (R_+, R) je modulem.

1.2. Lineární algebry

▶ 1.2.1. Definice. Mějme okruh R a množinu skalárů $S \neq \emptyset$. Pak (R, S) je okruh s operátory, pokud (R_+, S) je grupa s operátory a platí $(\forall \alpha \in S)(\forall a, b \in R^\bullet)\big(\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)\big)$.

▶ 1.2.2. Definice. Lineární algebra je dvojice (R, S), kde R je okruh, S je těleso a platí:

(1) (R_+, S) je unitární modul;

(2) (R, S) je okruh s operátory.

▶ 1.2.3. Poznámka. Pokud zapomeneme násobení skaláry, je lineární algebra okruhem. Pokud zapomeneme okruhové násobení, je vektorovým prostorem.

► 1.2.4. Příklad.

(1) $(\mathbb{C}^{n,n}, +, \cdot)$ je lineární algebra nad $\mathbb{C}$.

(2) $(\mathbb{C}^{n,n}, +, \cdot)$ je lineární algebra nad $\mathbb{R}$.

(3) C_R je lineární algebra C nad $\mathbb{R}$.

(4) R_R je lineární algebra R nad $\mathbb{R}$.

► 1.2.5. Definice. Algebry definované nad tělesem reálných čísel nazýváme reálné.

► 1.2.6. Poznámka. Mějme U těleso a $T \Subset U$ jeho podtěleso. Pak U je lineární algebra nad T a U_+ je vektorový prostor nad T.

• 1.3. Algebra kvaternionů

Vymyslel ji Hamilton v Dublinu 16. října 1843.

Vezměme algebru $\mathbb{C}^{2,2}$ nad $\mathbb{R}$ a uvažujme podmnožinu

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ukážeme, že K je podalgebra $\mathbb{C}^{2,2}$. Uzavřenost vůči sčítání matic je zjevná, stejně tak vůči násobení reálným číslem. Zbývá nám uzavřenost vůči součinu:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & ad + b\bar{c} \\ -\bar{b}c - \bar{a}\bar{d} & -\bar{b}d + \bar{a}c \end{pmatrix}.$$

Tedy K nad $\mathbb{R}$ je algebrou, kterou nazýváme kvaternionová algebra a její prvky nazýváme kvaterniony.

Je asociativní, není komutativní, má jednotku $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a je algebrou s dělením (tedy K jako okruh je tělesem) — ukážeme. Pro dané a, b hledáme c, d, aby $ac - b\bar{d} = 1$ a $\bar{b}c + \bar{a}\bar{d} = 0$. Zbylé dvě rovnice jsou lineárně závislé na těchto dvou. Matice soustavy s neznámými $c, \bar{d}$ je $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$ a její determinant je $D = |a|^2 + |b|^2$. Tedy podle Cramerova pravidla je $c = \frac{\bar{a}}{D}$ a $\bar{d} = \frac{-\bar{b}}{D}$, tedy $d = \frac{-b}{D}$.

Zapišme $a = \alpha_1 + \alpha_2 i$ a $b = \beta_1 + \beta_2 i$, kde $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2} \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 i & \beta_1 + \beta_2 i \\ -\beta_1 + \beta_2 i & \alpha_1 - \alpha_2 i \end{pmatrix} = \alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{i} + \beta_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{j} + \beta_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{k}.$$

Tedy $\dim K = 4$ a (e, i, j, k) tvoří bázi K. Prvky báze se násobí podle následující tabulky (první činitel vlevo, druhý nahoře):

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Označme $Q_8 := \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Pak Q_8 s násobením podle tabulky je grupa nazývaná kvaternionová grupa. V úvahu přicházejí čtyř- a dvouprvkové podgrupy. Jsou tři 4prvkové podgrupy, např. $\{1, -1, i, -i\}$, a jedna 2prvková $\{1, -1\}$. První 3 mají index 2, a jsou tudíž normální, taktéž 2prvková je normální. Tedy Q_8 je příklad neabelovské grupy, která má všechny podgrupy normální. Takové grupy se nazývají hamiltonovské.

► 1.3.1. Věta (Frobenius). Buď A reálná asociativní konečnědimenzionální lineární algebra bez dělitelů nuly. Je-li A komutativní, potom je izomorfní s algebrou C_R nebo R_R. Není-li A komutativní, pak je izomorfní s algebrou kvaternionů.