1. Uspořádané množiny

1.1. Uspořádané množiny. Řetězce

▶ 1.1.1. Definice.

(1) Množina M s uspořádáním $\leq$ se nazývá uspořádaná množina $(M, \leq)$.

(2) Přirozeným způsobem jsou na M definovány operace $\geq$, $<$, $>$.

(3) Nechť $R \subseteq M$ je úplně uspořádaná, pak ji nazveme řetězcem.

▶ 1.1.2. Definice. Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina, $a \in M$. Pak a je:

(1) největší prvek (poslední prvek) $\iff (\forall x \in M)(x \leq a)$;

(2) nejmenší prvek (první prvek) $\iff (\forall x \in M)(x \geq a)$;

(3) maximální prvek $\iff (\forall x \in M)(x \geq a \Rightarrow x = a)$;

(4) minimální prvek $\iff (\forall x \in M)(x \leq a \Rightarrow x = a)$.

▶ 1.1.3. Lemma.

(1) Je-li $a \in M$ poslední, je maximální.

(2) Je-li $a \in M$ první, je minimální.

▶ 1.1.4. Příklad.

(1) $(\mathbb{N}, \mid)$. Relace „dělí“: $a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{Z})(b = ac)$. První prvek je 1, poslední není.

(2) $(\mathbb{N}_0, \mid)$. Prvním prvkem zůstává 1, ale posledním je 0, neboť $n \mid 0$ pro všechna celá čísla.

(3) $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \mid)$. Nemá nejmenší, ale má minimální – jsou to všechna prvočísla.

▶ 1.1.5. Definice. Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina, $N \subseteq M$. Pak:

(1) $z \in M$ je horní závora podmnožiny $N \iff (\forall x \in N)(x \leq z)$.

(2) $z \in M$ je dolní závora podmnožiny $N \iff (\forall x \in N)(x \geq z)$.

(3) N je shora omezená $\iff$ existuje horní závora N.

(4) N je zdola omezená $\iff$ existuje dolní závora N.

▶ 1.1.6. Definice. Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ jsou 2 uspořádané množiny, $f : A \to B$. Pak řekneme, že f je izotonní (izotonie) $\iff (\forall x, y \in A)\big(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\big)$.

▶ 1.1.7. Definice. Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ jsou 2 uspořádané množiny. Pak:

(1) $f : A \to B$ je izomorfizmus, pokud je bijektivní a f i f^{-1} jsou izotonní, tj.

$$(\forall x, y \in A)\big(x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)\big).$$

(2) A a B jsou izomorfní (značíme $A \cong B$), pokud existuje izomorfismus $A \to B$.

• 1.2. Ekvivalence, subvalence množin

► 1.2.1. Definice.

(1) Řekneme, že M a N jsou ekvivalentní (ekvipotenční) $\iff$ existuje bijekce M na N. Značíme $M \approx N$.

(2) Řekneme, že M je subvalentní $N \iff$ existuje injekce (prosté zobrazení) M do N. Značíme $M \preccurlyeq N$.

(3) Řekneme, že M je ostře subvalentní $N \iff M \preccurlyeq N \wedge M \not\approx N$. Značíme $M \precapprox N$ nebo $M \prec N$.

► 1.2.2. Poznámka.

(1) $\approx$ je ekvivalence.

(2) Třídám ekvivalence $\mathcal{U}_{/\approx}$ přiřazujeme kardinální číslo.

(3) $\preccurlyeq$ není uspořádání, neboť $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \Rightarrow A \approx B$, nikoli $A = B$ ($\preccurlyeq$ je reflexivní, tranzitivní, ale není slabě antisymetrická). Lze tedy uspořádat kardinální čísla.

► 1.2.3. Věta (Cantor, Bernstein). Nechť M a N jsou libovolné množiny. Pak

$$M \preccurlyeq N \ \wedge \ N \preccurlyeq M \quad \Rightarrow \quad M \approx N.$$

◦ *Důkaz.* Víme, že existují injekce $f : M \to N$ a $g : N \to M$. Označme $N_1 := f(M)$, $M_1 := g(N)$, $N_1' := N \setminus N_1$, $M_1' := M \setminus M_1$. Pak $f : M \xrightarrow{\text{bij.}} N_1$ a $g : N \xrightarrow{\text{bij.}} M_1$.

Definujme posloupnost x_n následovně:

(1) $x_1 \in M$;

(2) pokud $x_1 \in M_1$, definuji $x_2 := g^{-1}x_1$, jinak je x_1 poslední v posloupnosti;

(3) pokud $x_2 \in N_1$, definuji $x_3 := f^{-1}x_2$, jinak je x_2 poslední v posloupnosti;

(4) ...

Posloupnost je jednoduše rekurentní (každý prvek závisí pouze na nejbližším předchozím), tedy se množina M direktně rozkládá na 3 podmnožiny:

(1) $x \in M_M \subseteq M$, pokud poslední člen posloupnosti obsahující x je v M;

(2) $x \in M_N \subseteq M$, pokud poslední člen posloupnosti obsahující x je v N;

(3) $x \in M_\infty \subseteq M$, pokud je posloupnost obsahující x nekonečná.

Obdobně definujeme N_M, N_N a N_∞.

Potom nutně $N_1' \subseteq N_N$, a tedy platí, že $f_{/M_M} : M_M \xrightarrow{\text{bij.}} N_M$ je prosté, protože f je prosté, a na, protože $N_M \subseteq f(M)$. Obdobně $g_{/N_N} : N_N \xrightarrow{\text{bij.}} M_N$ a konečně $f_{/M_\infty} : M_\infty \xrightarrow{\text{bij.}} N_\infty$. Tedy $M_M \approx N_M$; $M_N \approx N_N$ a $M_\infty \approx N_\infty$, z čehož díky disjunktnosti rozkladů plyne $M \approx N$. □

► 1.2.4. Věta (Cantor).

$$M \precnsim \mathcal{P}(M).$$

◦ *Důkaz.*

($M \preccurlyeq \mathcal{P}(M)$) Položme $f(x) := \{x\}$.

($M \not\approx \mathcal{P}(M)$) Důkaz sporem. Předpokládejme, že $M \approx \mathcal{P}(M)$.
Pak $(\exists g : M \xrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{P}(M))$. Označme $D := \{x \in M \mid x \notin g(x)\}$, $d = g^{-1}(D)$. Pak

- $d \in D \Rightarrow d \notin g(d) = D$;
- $d \notin D \Rightarrow d \in g(d) = D$,

což je spor. (Tento typ důkazu se nazývá Cantorův diagonální argument.)

□

1.3. Úplně uspořádané množiny

► 1.3.1. Definice. Nechť $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ jsou 2 úplně uspořádané množiny. Potom řekneme, že A je podobná B (relace podobnost; značíme $A \cong B$), pokud existuje zobrazení $f : A \to B$ nazývané podobnost, které je bijektivní a izotonní.

► 1.3.2. Lemma. Podobnost je ekvivalence na třídě všech úplně uspořádaných množin.

◦ *Důkaz.*

(reflexivita) Podobností je identita.

(symetrie) Podobností $g : B \to A$ je inverzní zobrazení k podobnosti $f : A \to B$.

(transitivita) existence podobností $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zajišťuje existenci podobnosti $h : A \to C$, $h = g \circ f$.

□

► 1.3.3. Definice. Ordinální typ je charakteristická vlastnost tříd ekvivalence na všech úplně uspořádaných množinách podle $\cong$. Značí se $\operatorname{ord} A$.

► 1.3.4. Příklad.

(1) $\operatorname{ord} \emptyset =: 0$.

(2) Nechť K je úplně uspořádaná a $|K| = k \in \mathbb{N}$. Pak $\operatorname{ord} K =: k$. (Jednoznačnost lze ukázat matematickou indukcí, každá má první prvek.)

(3) $\operatorname{ord}(\mathbb{N}, \leq) =: \omega$.

► 1.3.5. Věta. Nechť A a B jsou podobné množiny. Pak má-li A první prvek, má jej i B.

◦ *Důkaz.* Nechť p je první v A a $f : A \to B$ je podobnost. Ukážeme, že $f(p)$ je první v B, tj. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$. Ale p je první v A, tedy $x \geq p \Rightarrow y = f(x) \geq f(p)$. □

► 1.3.6. Lemma. Libovolné 2 úplně uspořádané konečné množiny o stejném počtu prvku jsou podobné.

◦ *Důkaz.* Ukážeme indukcí podle počtu prvků:

(1) $n = 1, n = 2$: zřejmé

(2) $n \geq 2 : |A| = |B| = n$.
Definujeme p, q jako nejmenší prvky v A resp. B, $A' = A - \{p\}, B' = B - \{q\}$. Pro A' a B' máme z indukčního předokladu podobnost $f' : A' \cong_{f'} B'$
Pro A, B definujeme podobnost:
$f(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{pro } x \in A' \\ q & \text{pro } x = p \end{cases}$

□

► 1.3.7. Příklad.

(1) $S = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N}$, $f : S \to \mathbb{N}$, $f(x) = x/2$.

(2) $\mathbb{N}_0 \cong \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$.

(3) $(\mathbb{Z}, \leq) \ncong (\mathbb{N}, \leq)$, neboť $\mathbb{N}$ má první a $\mathbb{Z}$ nikoliv, ale $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

► 1.3.8. Definice. Řekneme, že úplné uspořádání $(M, \leq)$ je husté, právě když:

$$(\forall x, y \in M, x < y)(\exists z \in M)(x < z < y).$$

► 1.3.9. Příklad.

(1) $(\mathbb{Z}, \leq)$ není husté uspořádání.

(2) $(\mathbb{Q}, \leq)$ je husté uspořádání.

► 1.3.10. Věta (Cantor). Libovolná spočetná hustě uspořádaná množina, která nemá ani první, ani poslední prvek, je podobná $(\mathbb{Q}, \leq)$.

► 1.3.11. Definice. Nechť A je úplně uspořádaná množina, $a \in A$. Pak úsekem množiny A určeným prvkem a rozumíme $A_a := \{x \in A \mid x < a\}$.

► 1.3.12. Věta. A úplně uspořádaná:

(1) Je-li a první v $A \iff A_a = \emptyset$.

(2) Je-li a poslední v A, pak $A_a = A \setminus \{a\}$.

(3) Ze 2 různých úseků množiny A je jeden úsekem druhého.

(4) $a \leq b \iff A_a \subseteq A_b$.

(5) $(\{A_a \mid a \in A\}, \subseteq)$ je úplně uspořádaná množina.

(6) $(\{A_a \mid a \in A\}, \subseteq) \cong (A, \leq)$.

• 1.4. Dobré uspořádání

▶ 1.4.1. Definice. Řekneme, že množina M je dobře uspořádaná, má-li libovolná neprázdná podmnožina M první prvek.

▶ 1.4.2. Věta. Dobré uspořádání je úplné.

◦ *Důkaz.* Mějme libovolné $a, b \in M$, $a \neq b$. Pak množina $\{a, b\} \subseteq M$ má první prvek, a tedy $a < b$ nebo $b < a$. □

▶ 1.4.3. Věta.

(1) Neprázdná dobře uspořádaná množina má první prvek.

(2) Libovolná podmnožina dobře uspořádané množiny je dobře uspořádaná.

(3) Množina podobná dobře uspořádané množině je dobře uspořádaná. (Dobře uspořádané množiny mají tedy vlastní třídy ekvivalence podle $\cong$ a jejich ordinální typ nazýváme ordinální číslo.)

(4) Libovolný prvek dobře uspořádané množiny M, který není poslední (poslední však nemusí existovat), má následníka, tj.

$$(\forall x \in M, x \text{ není poslední})(\exists y \in M)(\forall z \in M)(z \leq x \vee z \geq y).$$

▶ 1.4.4. Příklad. Mějme $(\mathbb{Z}, \preccurlyeq)$ s uspořádáním definovaným následovně:

(1) $x, y \geq 0 \quad x \prec y \Leftrightarrow x < y$;

(2) $x, y < 0 \quad x \prec y \Leftrightarrow -x < -y$;

(3) $x < 0 \leq y \quad y \prec x$.

Pak $\operatorname{ord}(\mathbb{Z}, \preccurlyeq) = \omega + \omega \neq \omega$ ($\operatorname{ord}\mathbb{N} = \operatorname{ord}\mathbb{N}_0 = \omega$).

▶ 1.4.5. Axiom (A9. Axiom výběru). Na libovolném $M \neq \emptyset$ existuje selektor (výběrová funkce) $\phi : \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \to M$ a platí: $(\forall A \subseteq M, A \neq \emptyset)(\phi(A) \in A)$.

▶ 1.4.6. Definice. Zermelova-Frankelova axiomatika s axiomem výběru se označuje ZFC.

▶ 1.4.7. Věta (Zermelo, v ZFC). Na libovolné množině existuje binární relace, která je jejím dobrým uspořádáním.

► 1.4.8. Věta (v ZFC). Nechť M je úplně uspořádaná množina. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) M je dobře uspořádaná;

(2) na M platí indukční podmínka:

$$\big(\forall N \subseteq M\big)\Big(\forall x \in M\big(\forall y \in M(y < x \Rightarrow y \in N) \Rightarrow x \in N\big) \Rightarrow N = M\Big);$$

(3) na M platí podmínka konečnosti klesajících řetězců (každý ostře klesající řetězec má konečnou délku).

◦ *Důkaz.* Pro $M = \emptyset$ je důkaz triviální. Tedy nechť $M \neq \emptyset$.

(1 ⇒ 2) Důkaz sporem. Nechť $(\exists N \subseteq M)(\forall x \in M(\forall y \in M(y < x \Rightarrow y \in N) \Rightarrow x \in N) \wedge N \subsetneq M)$. M je dobře uspořádaná, tedy má první prvek p a podle předpokladu (neexistuje $y < p$) je $p \in N$, tedy $N \neq \emptyset$. Dále $M \setminus N \neq \emptyset$ (N je vlastní podmnožina), tedy existuje první prvek $q \in M \setminus N$. Potom $(\forall y < q)(y \in N) \Rightarrow q \in N$, což je spor s $q \in M \setminus N$.

(2 ⇒ 3) Nechť N je množina všech $z \in M$, pro které neexistuje nekonečný ostře klesající řetězec začínající v z.

(3 ⇒ 1) Dokážeme sporem. Nechť M není dobře uspořádaná, tedy nechť existuje neprázdná $N \subseteq M$, která nemá první prvek. Pak pro libovolné $a \in N$ je úsek N_a neprázdný (jinak by a byl první prvek) a podle axiomu výběru $(\exists \phi : \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\} \to N)(\phi(x) \in x)$. Definujme posloupnost $(a_k)_1^\infty$ následovně: $a_1 := \phi(N)$; $a_{k+1} := \phi(N_{a_k})$. Protože N_a je neprázdná pro všechna a a $a_{k+1} < a_k$ (vlastnost úseku), je (a_k) nekonečný ostře klesající řetězec, což je spor.

□

► 1.4.9. Příklad. $\emptyset$ je dobře uspořádaná, $\mathbb{N}$ je dobře uspořádaná, $\operatorname{ord}\mathbb{N} = \omega = \operatorname{ord}\mathbb{N}_0$.
$\mathbb{Z}$ není při přirozeném uspořádání dobře uspořádaná, $\mathbb{Q}$ také není.

► 1.4.10. Lemma. Buďte A, B podobné dobře uspořádané množiny. Pak existuje pouze jedna podobnost A na B.

◦ *Důkaz.* Nechť $f : A \to B$, $g : A \to B$, $f \neq g$, $M := \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\} \neq \emptyset$, $M \subseteq A$, p první prvek v M. $b_1 = f(p)$, $b_2 = g(p)$, nechť $b_1 < b2$. Nechť $a \in A$ takové, že $g(a) = b_1$, $g(a) < b_2 = g(p)$. Z izotonie máme $f(a) < f(p) = b_1 = g(a)$. Z toho dostáváme $a \in M$, což je spor. □

► 1.4.11. Věta. Uspořádaná množina $(\mathbb{N}, \leq)$ je uspořádaná dobře.

► 1.4.12. Věta. Nechť A je dobře uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $B \cong A$, $f : A \to B$ je podobnost. Pak $(\forall x \in A)(f(x) \geq x)$.

◦ *Důkaz.* Označme $M := \{x \in A \mid f(x) < x\}$. Ukážeme sporem, že M je prázdná.
Nechť $M \neq \emptyset$. Pak $M \subseteq A$, tedy má první prvek p. Platí $f(p) < p$, tedy z izotonie f je $f(f(p)) < f(p)$, a tedy $f(p)$ je prvek M menší než p, což je spor. □

► 1.4.13. Věta. Ze 2 dobře uspořádaných množin je vždy jedna podobná druhé nebo jejímu úseku.

► 1.4.14. Důsledek. Dobře uspořádaná množina není podobná žádné podmnožině svého úseku ani žádnému úseku své podmnožiny, tedy ani žádnému svému úseku.

► 1.4.15. Věta (princip maximality, Zornovo lemma, Kuratowského lemma). Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Pak má-li libovolný řetězec z M horní závoru v M, pak libovolný prvek $a \in M$ je srovnatelný s nějakým maximálním prvkem v M. (A tedy existuje alespoň jeden maximální prvek v M.)

► 1.4.16. Věta (speciální případ Zornova lemmatu). Nechť $(\mathcal{S}, \subseteq)$ je systém množin uspořádaný inkluzí. Pokud pro každý řetězec R z $\mathcal{S}$ je $\bigcup R \in \mathcal{S}$, pak $(\forall A \in \mathcal{S})(\exists B \in \mathcal{S}, B \text{ maximální})(A \subseteq B)$.

► 1.4.17. Věta. Relace subvalence je trichotonická na třídě všech množin (tj. libovolné 2 prvky jsou srovnatelné).

○ *Důkaz.* Mějme 2 neprázdné množiny $A, B \in \mathcal{U}$. Označme M množinu všech prostých zobrazení z A do B, tedy $M = \left\{ f \;\middle|\; f : (A) \xrightarrow{\text{inj.}} B \right\}$. Každé f je speciální podmnožina $A \times B$, tedy $(M, \subseteq)$ je uspořádání. Nechť $R \subseteq M$ je řetězec. Označme $g := \bigcup R$ Ukážeme, že $g \in M$.

(g je zobrazení) Nechť $\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in g$. Pak $(\exists f_1, f_2 \in R)\big(\langle a, b_1\rangle \in f_1, \langle a, b_2\rangle \in f_2\big)$. Bez újmy na obecnosti je $f_1 \subseteq f_2$, a tedy $\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in f_2$, tedy (neboť f_2 je zobrazení) $b_1 = b_2$.

(g je injekce) Vezmeme $\langle a_1, b\rangle, \langle a_2, b\rangle \in g$. Stejným postupem dostaneme $a_1 = a_2$.

Tedy v M existuje maximální prvek f. Ukážeme, že je buďto $\operatorname{def} f = A$ nebo $f(A) = B$. Nechť $(\exists a \in A)(a \notin \operatorname{def} f)$ a $(\exists b \in B)(f^{-1}(\{b\}) = \emptyset)$. Pak $f' := f \cup \langle a, b\rangle$ je bijekce z A do B a $f \preccurlyeq f'$, což je spor s maximalitou f. □

► 1.4.18. Věta. Libovolný netriviální vektorový prostor V má (konečnou nebo Hammelovu) bázi.

○ *Důkaz.* Označme $\mathcal{S}$ systém všech lineárně nezávislých podmnožin V uspořádaný inkluzí. Ukážeme, že pro libovolný řetězec $R = \{A_i \mid i = 1, \ldots, n, \infty\} \subseteq \mathcal{S}$ je $A := \bigcup R \in \mathcal{S}$. Mějmě konečnou lineární kombinaci $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_j$ prvků z A. Pro každé a_j existuje A_{i_j} takové, že $a_j \in A_{i_j}$. Označme $i_m = \max_{j \in \widehat{k}} i_j$. Pak $(\forall j \in \widehat{k})(a_j \in A_{i_m} \in \mathcal{S})$, tedy $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_j = 0 \Leftrightarrow (\forall j)(\alpha_j = 0)$, což znamená, že $A \in \mathcal{S}$. Tedy podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek $B \in \mathcal{S}$.

Ukážeme, že $B_\lambda = V$. Zjevně $B_\lambda \subseteq V$, tedy zbývá ukázat, že generuje: Vezměme $v \in V \setminus B$. Pak $B \cup \{v\} \supsetneq B$ je lineárně závislá (jinak by B nebyla maximální v $\mathcal{S}$). Tedy existuje konečná lineární kombinace z $B \cup \{v\}$ a nutně je koeficient u v nenulový (jinak by kombinace byla nulová a z B, ale B je lineárně nezávislá). Tedy $v \in B_\lambda$. □

► 1.4.19. Věta (Hausdorffův princip, v ZFC). V libovolné uspořádané množině je každý řetězec částí nějakého maximálního řetězce (ve smyslu inkluze).

► 1.4.20. Věta. V ZF axiomatice jsou následující výroky ekvivalentní:

(1) axiom výběru;

(2) princip dobrého uspořádání (Zermelova věta);

(3) princip maximality (Zornovo lemma);

(4) Hausdorffův princip.

1.5. Uspořádání kartézského součinu

► 1.5.1. Definice. Nechť $(A, \leq)$, $(B, \leq)$, $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$.
Pak definuji lexikografické uspořádání:

$$\langle a, b\rangle \leq \langle c, d\rangle \iff (a < c \ \vee \ (a = c \wedge b \leq d)).$$

► 1.5.2. Lemma. Jsou-li A, B dobře uspořádané, pak i lexikografické uspořádání na $A \times B$ je dobré.

○ *Důkaz.* Nechť $\emptyset \neq M \subseteq A \times B$. Položme $M_A := \{a \in A \mid (\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in M)\}$. $\emptyset \neq M_A \subseteq A$, tedy má první prvek p. Položme $M_B := \{b \in B \mid \langle p, b\rangle \in M\}$. $\emptyset \neq M_B \subseteq B$, tedy má první prvek q.

Ukážeme, že $(\forall \langle a, b\rangle \in M)(\langle p, q\rangle \leq \langle a, b\rangle)$. Z definice M_A je $p \leq a$ a pokud $p = a$, je z definice M_B $q \leq b$. □

► 1.5.3. Definice. Nechť A, B jsou dobře uspořádané množiny, $\alpha = \operatorname{ord} A$, $\beta = \operatorname{ord} B$. Definujeme součin ordinálních čísel:

$$\alpha \cdot \beta := \operatorname{ord}(B \times A).$$

► 1.5.4. Příklad.

(1) $\operatorname{ord} \mathbb{N} = \omega$.

(2) $\omega \cdot \omega = \operatorname{ord}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) =: \omega^2$.

(3) $\omega \cdot 2 = \operatorname{ord}(\{a, b; a < b\} \times \mathbb{N}) = \omega + \omega \neq \omega$.

(4) $2 \cdot \omega = \operatorname{ord}(\mathbb{N} \times \{a, b\}) = \operatorname{ord} \mathbb{N} = \omega$. Tedy $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$.

► 1.5.5. Definice. Nechť $\mathcal{S} = \{A_i \mid i \in I\}$ je systém po dvou disjunktních množin (disjunktnost lze zaručit položením $A_i' := \{i\} \times A_i$. Nechť $(I, \leq_I)$ je uspořádání, stejně tak pro všechna $i \in I$ je $(A_i, \leq_i)$ uspořádání. Pak definujeme uspořádané sjednocení uspořádaných množin na množině $A = \bigcup \mathcal{S}$. Nechť $a, b \in A$, $a \in A_i$, $b \in A_j$. Pak

$$a \leq b \Leftrightarrow (i <_I j \vee (i = j \wedge a \leq_i b)).$$

► 1.5.6. Lemma. Uspořádání $\leq$ na A je úplné/dobré, pokud $\leq_I$ i všechna $\leq_i$ jsou úplná/dobrá.

○ *Důkaz.* Obdobně jako pro kartézský součin □

► 1.5.7. Definice. Nechť A_1, A_2 jsou dobře uspořádané množiny, $\alpha = \operatorname{ord} A_1$, $\beta = \operatorname{ord} A_2$. Definujeme součet ordinálních čísel:

$$\alpha + \beta := \operatorname{ord} \bigcup \{A_1, A_2\}.$$

► 1.5.8. Příklad.

(1) $1 + \omega = \operatorname{ord} \bigcup \{A_1 = \{a\}; A_2 = \mathbb{N}\} = \omega$.

(2) $\omega + 1 = \operatorname{ord} \bigcup \{A_1 = \mathbb{N}; A_2 = \{a\}\} \neq \omega$.